Istituto Nazionale per Studi
ed Esperienze di Architettura Navale
CRS4- Centro di Ricerca Sviluppo e Studi Superiori in Sardegna

CONFRONTO DI SOLUTORI FEM E SOLUTORI BEM PER LO SLOSHING IN CONTENITORI

I. Lodes, G. Colicchio, G. Graziani, G. Fotia

Indice

1 Introduzione

È stato studiato il fenomeno di sloshing attraverso due diversi algoritmi numerici: il primo consiste in una discretizzazione con elementi finiti dell'equazione di Navier–Stokes in formulazione *Arbitrary Lagrangian Eulerian*, è indicato nel seguito come FEM ed è descritto in [3]; il secondo è basato sulla discretizzazione delle equazioni agli integrali di contorno e delle equazioni di evoluzione della superficie libera ed è indicato come BEM e descritto in [2].

Per verificare la validità dei due codici sono stati confrontati i loro risultati con quelli presenti in letteratura, sia derivanti da altri codici numerici, sia ottenuti come risultati sperimentali.

Il confronto è stato effettuato per un'ampia gamma di situazioni, in modo da studiare il comportamento dei due codici al variare delle caratteristiche della sollecitazione e delle dimensioni del dominio.

2 Confronto degli algoritmi numerici

Per il fenomeno di sloshing si fa frequentemente riferimento in letteratura al caso dell'oscillazione forzata in contenitori rettangolari. Per poter disporre di dati di confronto, nelle simulazioni sono stati considerati donmini rettangolari le cui caratteristiche geometriche sono riportate nella Tabella 1. Nella stessa tabella, sono descritte anche la frequenza e l'ampiezza della sollecitazione applicata.

	L(m)	H(m)	ω(rad/s)	A(m)	ω_0(rad/s)
A	0.6	0.3	4.002	0.00186	6.860
B	0.8	0.3	5.592	0.0031	5.643
C	1	0.5	5.311	0.0093	5.316
D	8	1	1.19954	0.0372	1.19958
E	8	1	1.19954	0.00372	1.19958
F	25	1	0.3915	2.5	0.39255

Tabella 1: Caratteristiche geometriche dei contenitori (larghezza L, profondità H), prima frequenza propria ω_0 e caratteristiche delle forzanti (ampiezza A e pulsazione ω) per i casi di oscillazione orizzontale studiati.

In tutti i casi l'oscillazione orizzontale imposta al contenitore è sinusoidale ed è descritta da una legge per le accelerazioni del tipo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t)$$

mentre la velocità iniziale imposta al contenitore è nulla.

Nel caso dell'algoritmo agli elementi finiti il dominio è stato discretizzato tramite elementi detti *brick* (parallelepipedi). Poichè ci si è limitati allo studio bidimensionale del fenomeno di sloshing, si è utilizzato un unico strato di brick lungo la direzione y come mostrato in Figura 1.

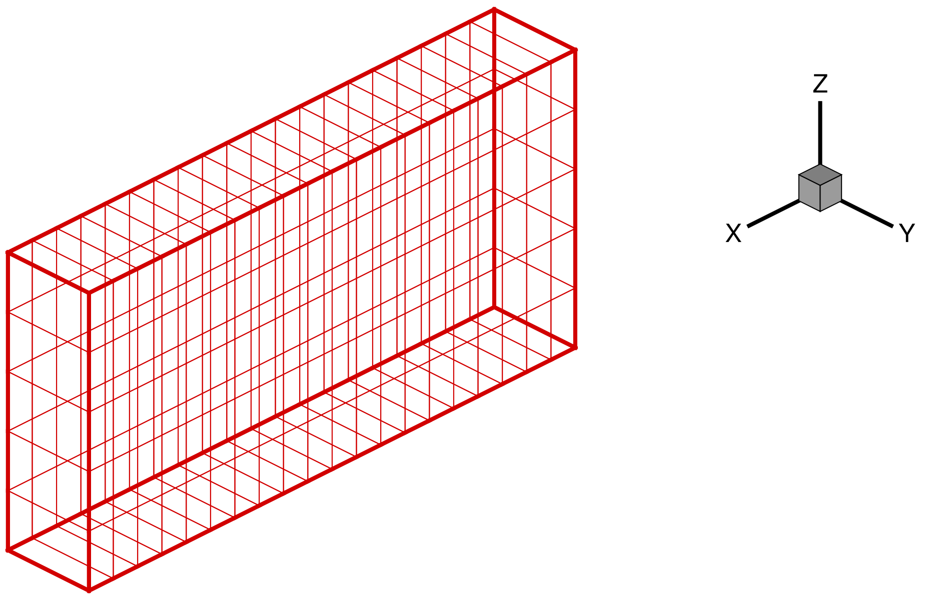

Figura 1: Esempio di griglia per il metodo FEM.

2.1 Caso A

La frequenza di oscillazione imposta è pari a 0.583 volte la prima frequenza propria di sloshing. Con questa scelta l'ampiezza dell'oscillazione della superficie libera viene limitata dal fenomeno di modulazione; un'ulteriore limitazione viene dalla ridotta ampiezza dell'oscillazione imposta al contenitore.

Tale caso si può, dunque, ritenere relativamente semplice da trattare e risulta utile per determinare l'influenza del time step impiegato nel metodo FEM sulla soluzione. Si assumerà, nel seguito, che la soluzione ricavata col metodo BEM sia già giunta a convergenza. In Figura 2 è rappresentata l'oscillazione di un punto di contatto: sono messe a confronto la soluzione ricavata con il metodo BEM e quella ottenuta con il metodo FEM al variare del passo di integrazione temporale Δt.

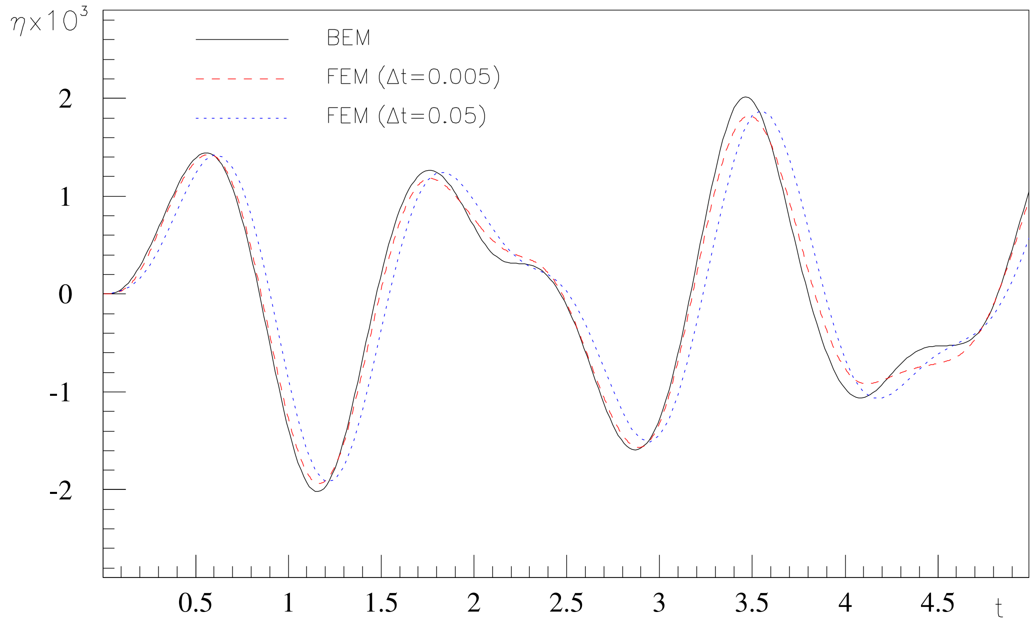

Figura 2: Caso A: andamento temporale dell'elevazione d'onda in un punto di contatto. La discretizzazione spaziale impiegata è in entrambi i casi di 20×5 elementi.

Si può notare come, al diminuire del Δt impiegato, la soluzione ricavata con il metodo FEM tenda a coincidere con quella ottenuta con il metodo BEM. In realtà, sussistono ancora delle differenze ma, a causa della scarsa disponibilità di tempo, non è stato possibile indagare se, riducendo ulteriormente il time step, la soluzione converga effettivamente a quella di riferimento.

2.2 Caso B

Si è voluto confrontare il comportamento dei due metodi in una situazione prossima a quella di risonanza per tempi di simulazione elevati. In Figura 3 è riportato l'andamento nel tempo dell'elevazione d'onda in corrispondenza di un punto di contatto quando $\omega = 0.991\omega_0$.

Sulla base delle indicazioni fornite dal caso precedente, è stato utilizzato un time step di 0.005 s e una griglia di 20×5 elementi. Si può osservare come, mentre inizialmente l'accordo tra i due metodi risulta ottimo, per tempi elevati la soluzione ricavata con il metodo FEM presenta la stessa frequenza di quella ottenuta con l'algoritmo BEM ma una altezza d'onda progressivamente più smorzata.

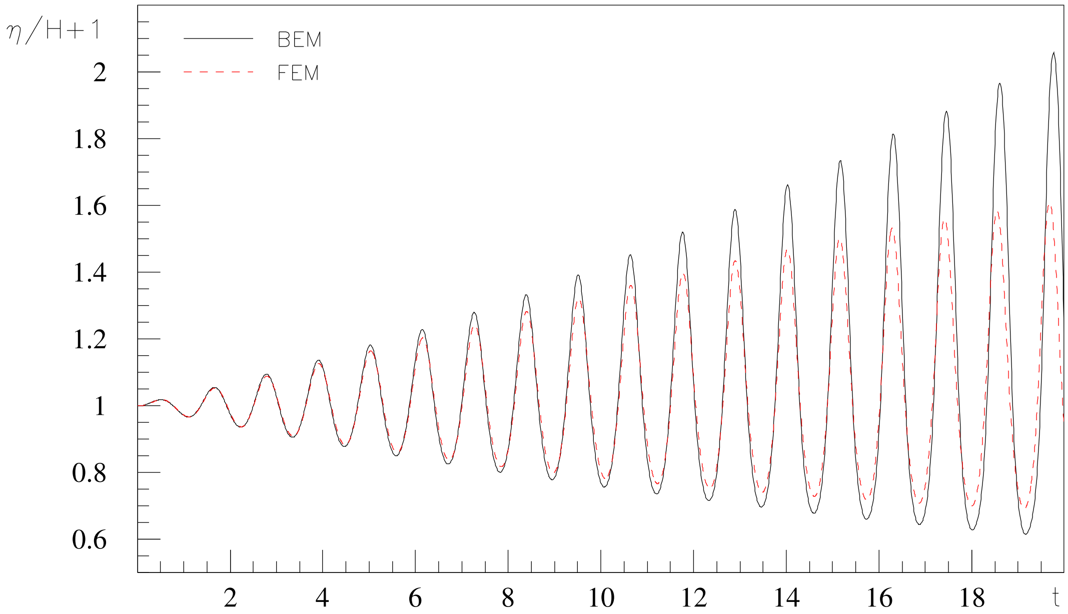

Figura 3: Caso B: oscillazione del punto di contatto.

È stato operato anche un confronto con i risultati ottenuti da [1] con un metodo agli elementi finiti in formulazione *space-time*[1]. Anche in quel caso, è stato osservato come la soluzione ottenuta con il metodo FEM presenti un maggiore smorzamento. Le cause di questo comportamento devono essere attribuite in parte alle caratteristiche dell'algoritmo numerico e in parte alla discretizzazione spaziale scelta che risulta eccessivamente rada. Allo scopo di verificare tale ipotesi, nella simulazione successiva si è fatta variare la dimensione caratteristica della griglia, confrontando i risultati con quelli sperimentali disponibili in [4].

2.3 Caso C

Allo scopo di individuare la dimensione caratteristica ottimale per la discretizzazione spaziale, si è inizialmente considerata una griglia relativamente grossolana, caratterizzata da 20 elementi lungo la larghezza e 5 lungo l'altezza. Quindi si è progressivamente infittita tale discretizzazione passando a 40×10 elementi ed, infine,

[1] Il metodo space-time consiste in una discretizzazione agli elementi finiti nello spazio e nel tempo.

a 80×20. La durata totale della simulazione è stata in ogni caso di 4 s, mentre il $\Delta t = 0.005$ s.

In Figura 4 sono rappresentate le superfici libere in alcuni istanti; sebbene i grafici si riferiscano alla griglia più grossolana, non si nota una forte differenza tra i risultati sperimentali e i risultati dei due codici.

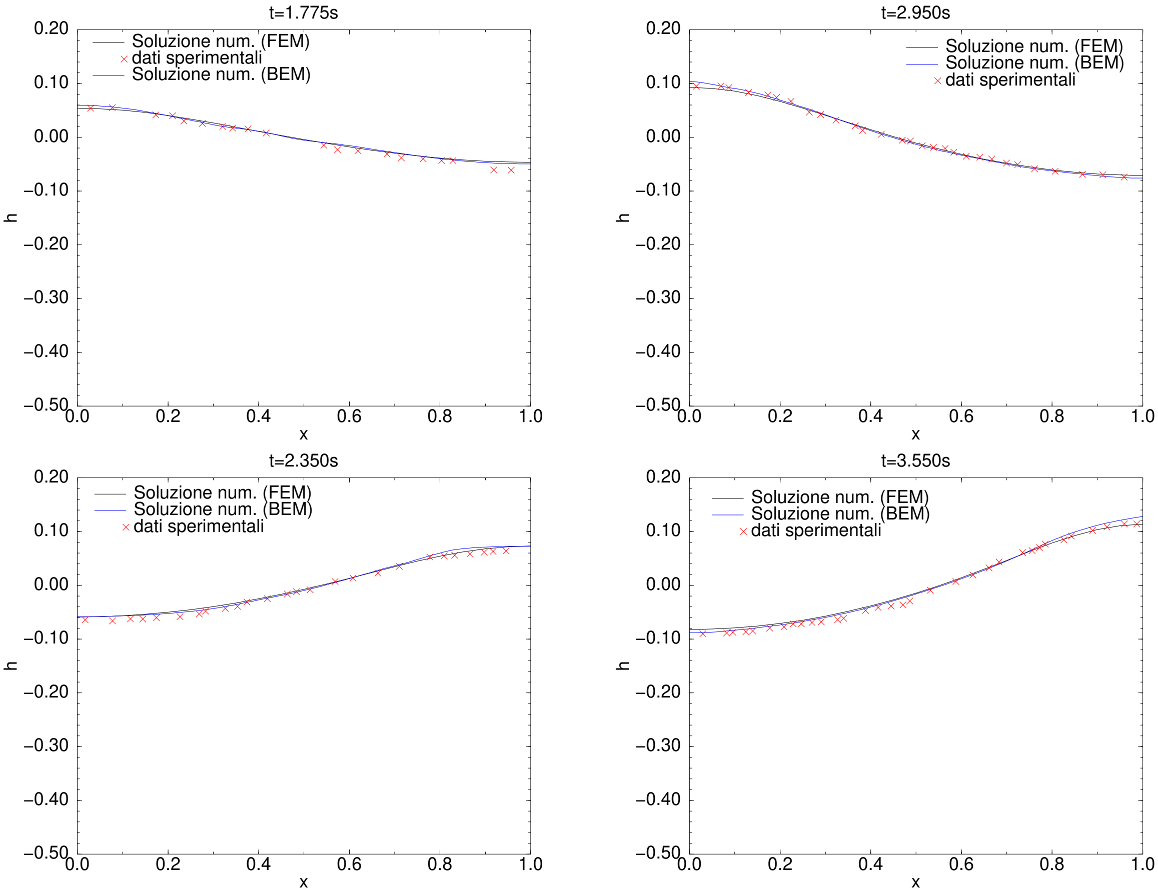

Figura 4: Andamento della superficie libera negli istanti t = 1.775, 2.375, 2.950, 3.550 s (griglia 20×5).

In Figura 5 è mostrata la storia temporale dell'elevazione d'onda in un punto di contatto al variare del reticolo utilizzato. L'accordo tra i due metodi migliora quanto più è fitta la griglia impiegata.

Per quanto riguarda la dimensione ottimale della mesh, assumendo che al diminuire della dimensione caratteristica h aumenti la precisione della soluzione, si può osservare che, oltre un certo limite, il guadagno ottenibile in termini di altezza d'onda non è comparabile con il maggiore impegno di risorse necessario, nè in termini di tempo nè di complessità computazionale. Passando dalla griglia 20×5 a quella 40×10, la variazione percentuale di altezza è dell'ordine del 6%; invece, passando

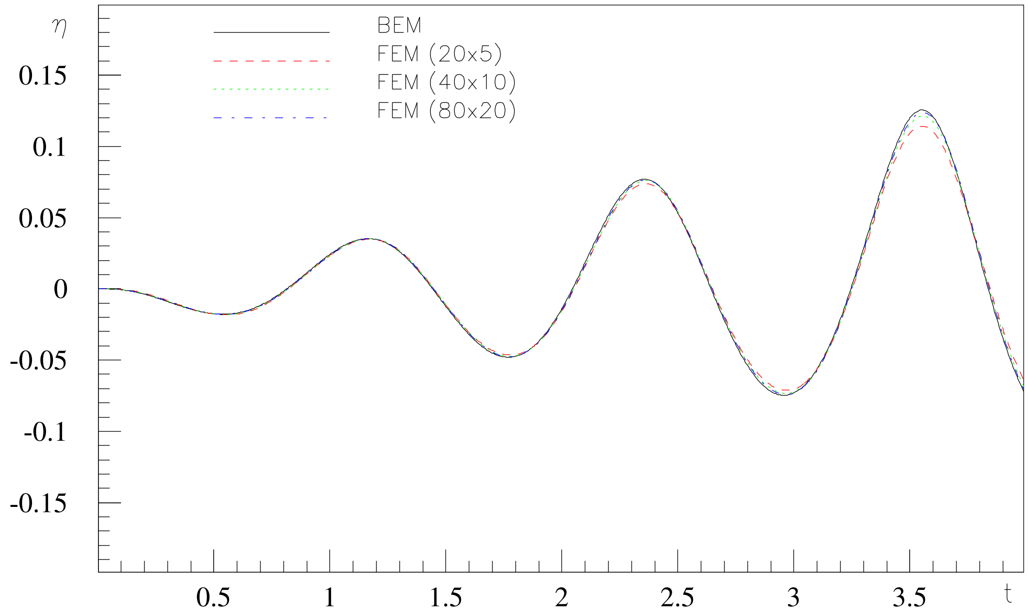

Figura 5: Andamento nel tempo dell'elevazione d'onda nel punto di contatto destro: confronto tra la soluzione ottenuta con il metodo FEM, e diverse griglie, e la soluzione ottenuta con il metodo BEM.

dalla griglia 40×10 a quella 80×20, tale variazione è dell'ordine del 1.6%. Tuttavia all'aumentare del tempo di simulazione tale differenza va crescendo.

I dati relativi al tempo di calcolo e all'uso di memoria sono riassunti nella Tabella 2.

h (m)	user time (s)	system time (s)	wall time (s)	mem. span (byte)
0.112 (20×5)	1.5366e+03	2.9170e+01	1.6650e+03	1.0253e+04
0.056 (40×10)	5.3527e+03	3.8410e+01	5.6638e+03	1.2786e+04
0.028 (80×20)	2.4473e+04	8.6380e+01	2.5579e+04	2.2354e+04

Tabella 2: Tempo di calcolo e uso di memoria al variare della dimensione caratteristica della mesh (i dati si riferiscono ad una HP-UX A 9000/780).

Da questa risulta che la simulazione con la griglia 80×20 ($h \approx 0.028$ m) è estremamente più dispendiosa delle prime due, mentre non comporta altrettanto rilevanti miglioramenti nella soluzione. Pertanto si può concludere che la dimensione caratteristica ottimale per questo problema è $h \approx 0.056$ m. Per ottenere un risultato generale tale dimensione andrebbe messa in relazione con l'ampiezza e con la frequenza dell'eccitazione.

2.4 Caso D e Caso E

Nelle Figure 6 e 7 sono descritte le storie temporali dell'elevazione d'onda in un punto di contatto nel caso in cui l'ampiezza della sollecitazione sia pari, rispettivamente, a 0.00372 m e a 0.0372 m.

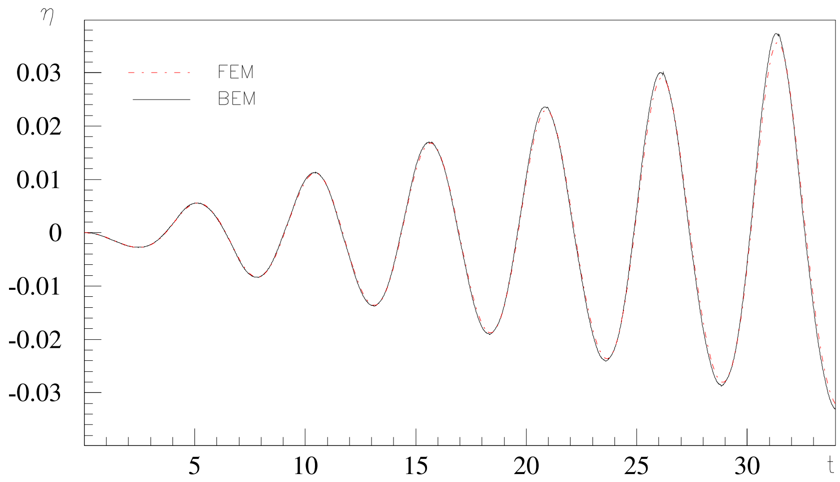

Figura 6: Storia temporale del punto di contatto per il caso D.

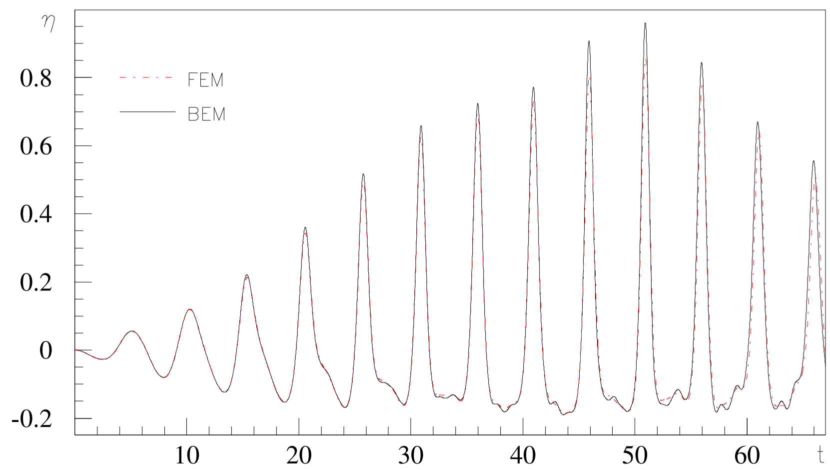

Figura 7: Storia temporale del punto di contatto per il caso E.

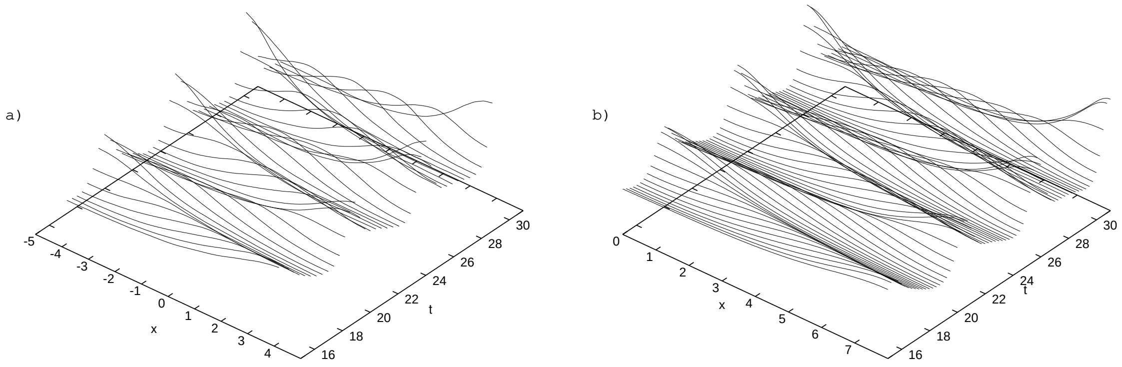

Figura 8: Evoluzione della superficie libera nel caso E (a sinistra come soluzione del metodo BEM a destra come soluzione del metodo FEM).

Ancora una volta il confronto tra i due algoritmi risulta molto soddisfacente. Relativamente al metodo FEM permane lo smorzamento evidenziato precedentemente, ma in questo caso la differenza tra i risultati è molto minore avendo utilizzato un maggior numero di elementi (160×10). Ovviamente, se l'ampiezza di oscillazione è minore l'errore commesso è più basso. Con tale discretizzazione, comunque, è possibile anche cogliere fenomeni totalmente non lineari come quelli che si verificano nel caso in cui l'ampiezza di oscillazione sia pari a 0.0372 m. Infatti in entrambe le figure (8.a e 8.b) si nota che il fenomeno più evidente è la formazione di un'onda che si muove attraverso il contenitore. Nella già citata Figura 7 i picchi di grande ampiezza corrispondono all'avvicinarsi dell'onda alle pareti, mentre i massimi relativi che si manifestano quando l'altezza d'onda è negativa si riferiscono all'onda stazionaria sempre associata al fenomeno di sloshing.

2.5 Caso F

Questo caso risulta tra i più gravosi: la frequenza di oscillazione è molto vicina a quella di risonanza, il rapporto tra profondità del contenitore e la sua ampiezza risulta molto piccolo e l'ampiezza di oscillazione è grande. Ci si può quindi aspettare che gli effetti di non linearità siano subito percepibili.

Per questo motivo è stata scelta una discretizzazione spaziale caratterizzata da un gran numero di elementi (500×10). In Figura 9 sono mostrate le oscillazioni del punto di contatto destro e sinistro del contenitore come risultato della simulazione con il codice BEM e con il codice FEM.

Entrambi i modelli riescono a dare risultati fino a $t \simeq 10$ s. In corrispondenza di tale istante si hanno delle condizioni di breaking incipiente che questi codici non riescono a seguire. In Figura 10 è riportata l'evoluzione della superficie libera per emtrambi; anche in questo caso, si può dire che, fino all'istante considerato, l'accordo è ottimo. Per un maggior dettaglio, in Figura 11 viene riportata la superficie libera a $t = 6.4$ s e si nota come i risultati dei due codici si sovrappongano perfettamente.

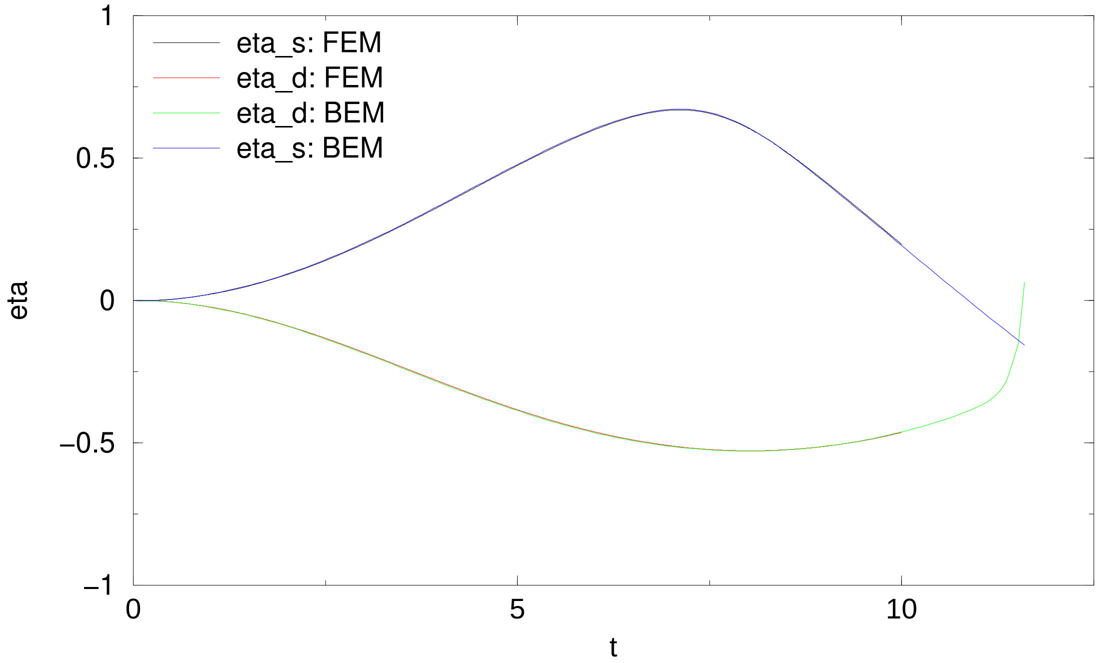

Figura 9: Caso F: andamento temporale dell'elevazione d'onda nei punti di contatto destro e sinistro.

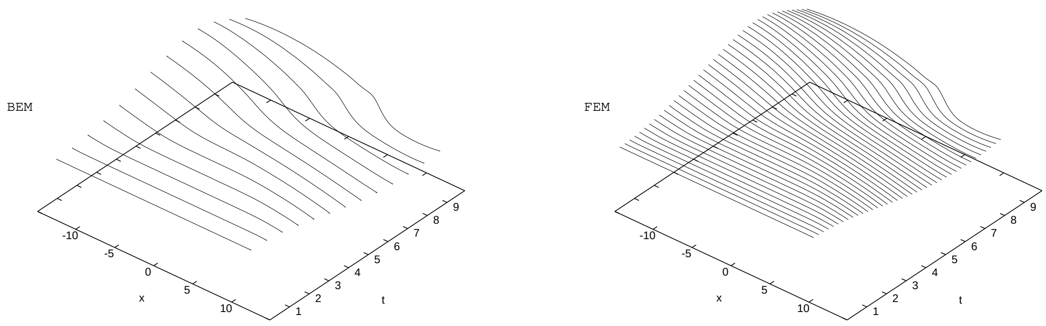

Figura 10: Evoluzione della superficie libera.

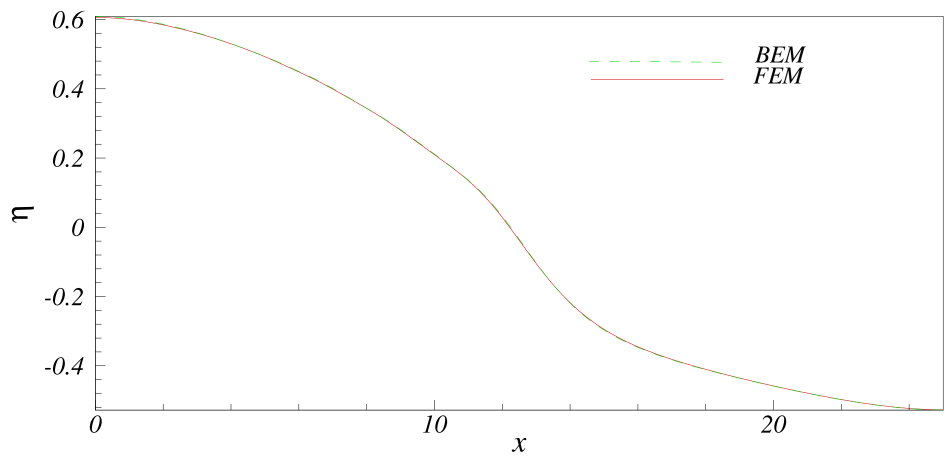

Figura 11: Superficie libera a $t = 6.4$ s.

3 Considerazioni conclusive

Per confrontare effettivamente le diverse caratteristiche dei due codici, vengono riportati in Tabella 3 i valori di:

- time step,
- numero di elementi lungo la parete verticale,
- numero di elementi lungo la superficie libera.

In generale si può osservare che per ottenere la stessa precisione il codice FEM necessita di un maggiore numero di elementi e, concordemente con questa scelta, di un Δt minore.

Un altro elemento di interesse è il tempo computazionale necessario per portare a termine la simulazione. Un tale tipo di confronto è stato effettuato per il caso F e si è trovato che, sulla stessa macchina (HP), il codice BEM ha impiegato circa un'ora per completare la simulazione, mentre il tempo computazionale richiesto dal codice FEM è di circa due giorni.

Allo stesso modo si possono analizzare le proprietà di conservazione della massa dei due codici. Dalla Figura 12 è evidente come, per entrambi i modelli, quando i fenomeni di non linearità sono trascurabili, le proprietà di conservazione della massa sono buone. Quando, invece, le non linearità diventano predominanti, l'errore commesso aumenta.

In conclusione, il codice BEM risulta più efficiente in quanto richiede un minor tempo di calcolo e minori risorse di memoria. Al contrario il codice FEM, più

	A	B	C	D	E	F
Δt(s) FEM	0.05	0.005	0.0050	0.0100	0.0100	0.0050
Δt(s) BEM	0.0152	0.0112	0.0236	0.0262	0.0131	0.0800
$N_x \times N_y$ FEM	20×5	20×5	80×20	160×10	160×10	500×10
$N_x \times N_y$ BEM	30×15	40×15	40×20	40×10	40×10	75×3

Tabella 3: Tabella riassuntiva delle caratteristiche della geometria e del time step per le simulazioni effettuate.

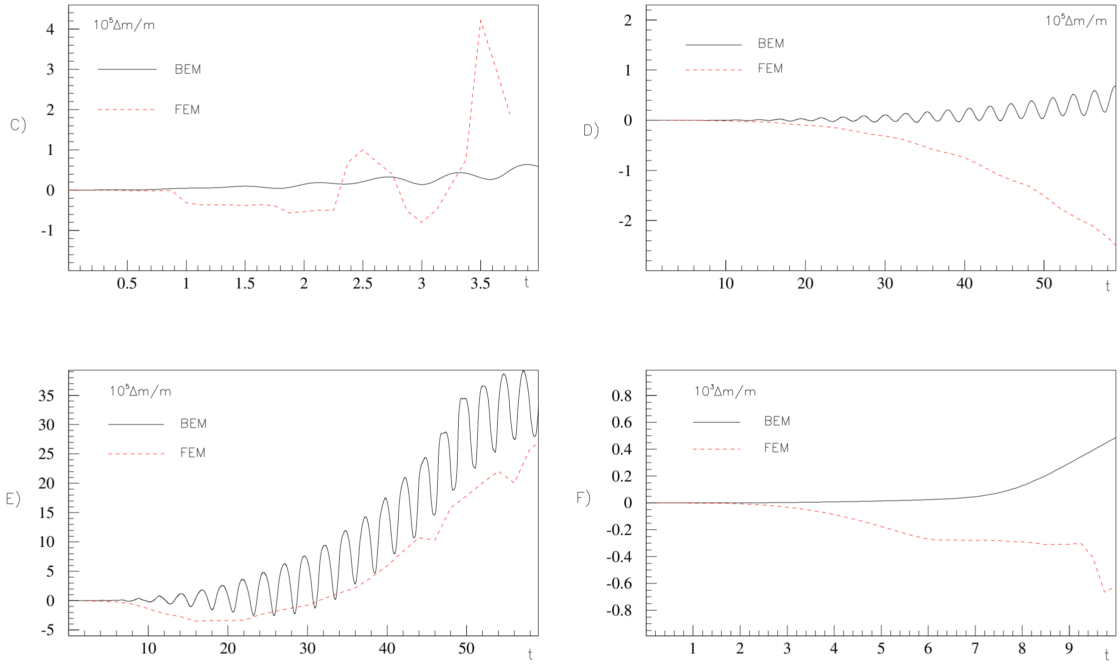

Figura 12: Conservazione della massa per i diversi casi.

generale, consente di ricavare informazioni anche sul comportamento del liquido all'interno del dominio.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Behr. *Stabilized Finite Element Methods for Incompressible Flows with Emphasis on Moving Boundaries and Interfaces.* PhD thesis, Department of Aerosapce Engineering and Mechanics, University of Minnesota, 1992.

[2] G. Colicchio. Dinamica di veicoli marini con liquidi a bordo, 1998. Tesi di laurea.

[3] Ilaria Lodes. Simulazione numerica di problemi di sloshing con metodi ad elementi finiti in domini mobili. Technical report, INSEAN, 1999.

[4] T. Okamoto and M. Kawahara. Two-dimensional sloshing analysis by lagrangian finit element method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 11:453–477, 1990.