Confronto SEM - FEM per un problema di dinamica strutturale

L. Massidda, G. Siddi, M. Vallascas
Center for Advanced Studies, Research and Development in Sardinia (CRS4)

October 24, 2002

1 Introduzione

In questo rapporto si é voluto affrontare un problema classico di ingegneria civile, quello di una trave semplicemente appoggiata sollecitata da una forza impulsiva in mezzeria.
Il problema in esame, ben noto dal punto di vista sia sperimentale che teorico e' stato utilizzato per verificare l'applicabilitá delle metodologie ad elementi spettrali, alla risoluzione di un problema di semplice dinamica strutturale. La metodologia SEM (Spectral Element Method) é stata implementata dal gruppo di Meccanica dei Solidi e delle Strutture nella famiglia di codici ELSE, finora queste metodologie sono state impiegate in ambito strutturale, per la risoluzione di problemi statici, e di dinamica transiente "veloce" legata cioé alla propagazione di onde elastiche nelle strutture. I fenomeni dinamici in questo caso sono piu' lenti, interessano frequenze inferiori, e vengono genericamente definiti come problemi di dinamica strutturale.
I risultati ottenibili con la metodologia spettrale saranno confrontati con quelli ottenibili con una specifica metodologia ad elementi finiti, implementata nel codice commerciale ANSYS, di provata affidabilitá.

2 Il problema

Si considera una trave a doppio T semplicemente appoggiata, libera di vibrare in direzione verticale, disposta in modo che possa inflettersi secondo l'asse della sezione che offre la minore inerzia, ossia con l'anima orizzontale. Nelle Figure 1 e 2 sono riportate rispettivamente uno schema della trave e le principali caratteristiche geometriche della sezione.

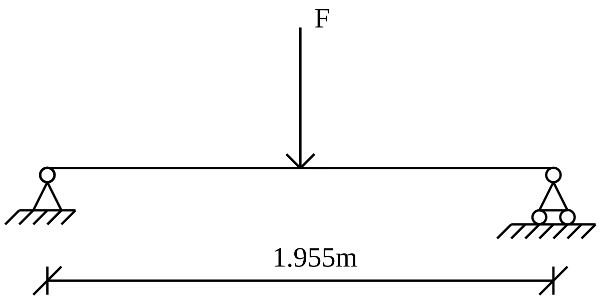


Figure 1: Schema trave

Le caratteristiche del materiale utilizzato e le altre grandezze geometriche sono riportate nella tabella 1: La trave e' soggetta ad una forza di tipo impulsivo applicata in mezzeria. La forma

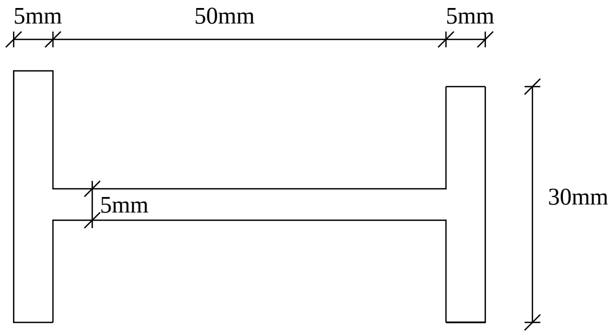


Figure 2: Sezione trasversale

E	$1.877 \cdot 10^{11} N/m^2$
G	$7.8208 \cdot 10^{10} N/m^2$
ρ	$7481 Kg/m^3$
ν	0.2
L	1.955m
A	$5.5 \cdot 10^{-4} m^2$
J	$2.3 \cdot 10^{-8} m^4$

Table 1: Proprietá del materiale e della struttura

dell'impulso, ossia la sua durata e la legge di variazione della forza possono influenzare in maniera importante il comportamento della trave nel transitorio, in questo caso si considera un impulso di forma triangolare avente una durata $T = 0.004s$ ed una intensitá massima $F = 250N$, il cui andamento é riportato in figura 3.
La sua trasformata di Fourier e':

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \nu = 0 \\ sinc^2(\pi T \nu) = \frac{sin^2(\pi T \nu)}{(\pi T \nu)^2} & \text{se } \nu \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

La frequenza massima puo' essere considerata $\nu_{max} = 2/T$ (i primi due "lobi" della Trasformata di Fourier), cioe $\nu_{max} = 5000Hz$. Date le caratteristiche meccaniche del materiale adottato si calcolano i moduli di Lamé:

$$\lambda = 5.21389 \cdot 10^{10} Pa \tag{2}$$

$$\mu = 7.82083 \cdot 10^{10} Pa \tag{3}$$

da cui si ottengono le velocitá di propagazione di taglio υ_s e perpendicolare υ_p:

$$\upsilon_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = 3233.3 m/s \tag{4}$$

$$\upsilon_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = 5279.96 m/s \tag{5}$$

La lunghezza d'onda minima vale quindi:

$$\lambda_{min} = \frac{\upsilon_s}{\nu_{max}} = 0.647m \tag{6}$$

La taglia degli elementi spettrali per lo studio della propagazione di onde elastiche varia a seconda del grado spettrale adottato e puó essere assunta pari a $H = 0.065m$ nel caso per un grado

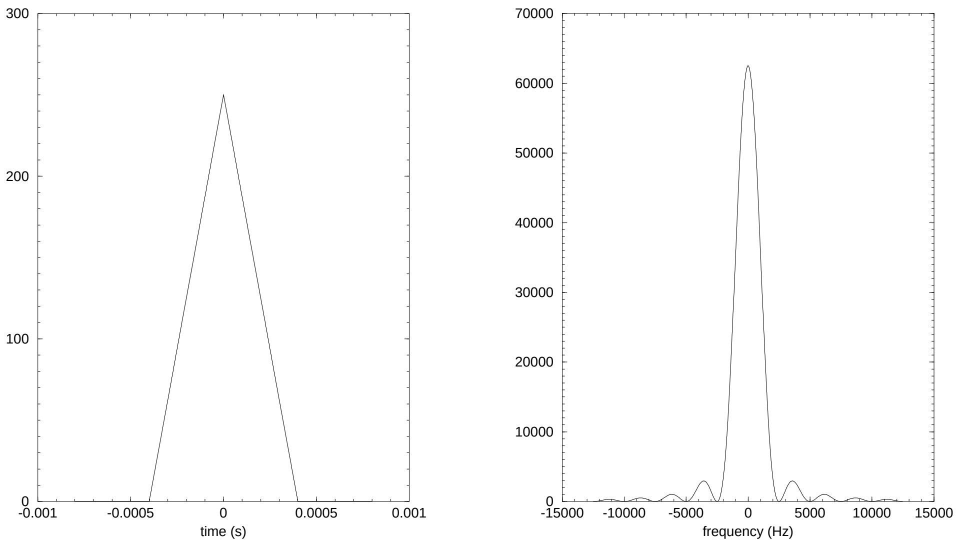


Figure 3: Time-history della forza applicata e trasformata di Fourier

spettrale unitario $n = 1$ fino ad esempio a $H = 0.647m$ per $n = 5$.
Le caratteristiche della sezione e del carico applicato nel caso di una analisi tridimensionale impongono un valore piu' basso della taglia dell'elemento, come sara' anche evidenziato in seguito.
La natura del problema permette di utilizzare le approssimazioni dei piccoli spostamenti, e si fa l'ipotesi che il materiale mantenga proprietá lineari elastiche.

3 Simulazioni con ELSE

ELSE é una famiglia di codici basati sul Metodo degli Elementi Spettrali, per risolvere questo problema viene applicato un codice per la propagazione di onde elastiche in domini tridimensionali. Il codice é basato su un algoritmo di avanzamento in tempo esplicito accurato al second'ordine, e su un approccio "element by element", che garantisce maggiore velocitá e ridotta occupazione di memoria.
Il problema presenta proprietá di simmetria sia per quanto riguarda le caratteristiche geometriche che per le condizioni di carico. Infatti é possibile individuare un piano longitudinale ed uno trasversale rispetto a cui carichi e geometria risultano simmetrici; per quanto riguarda le condizioni di vincolo queste non rispettano la simmetria rispetto alla sezione trasversale tuttavia la tipologia del carico (una forza in direzione verticale) ed il fatto che il modello fisico applicato si basa sull'ipotesi di piccoli spostamenti, permettono di limitare lo studio ad un quarto di trave senza inficiare la validita' dei risultati.
Sulla base di questo si e' deciso di modellare la trave come schematizzato in Figura 4. In particolare per quanto riguarda il vincolo nell'estremita' destra della trave (piano 3), si e' supposto che la trave fosse appoggiata in corrispondenza dell'anima, percio' si sono impediti gli spostamenti verticali di tutti i suoi nodi. Avendo inoltre modellato solo un quarto della trave, si sono inseriti opportunamente i vincoli nei piani in cui si e' praticato un ipotetico taglio. Piu' precisamente nel piano di simmetria trasversale (piano 1) sono stati impediti gli spostamenti lungo l'asse z (vedi figura 4), nel piano di simmetria longitudinale (piano 2) sono stati bloccati gli spostamenti lungo l'asse x. La forza applicata e' pari ad un quarto dell'originaria.
Si sono monitorati i risultati in corrispondenza di due punti della trave: il punto A cioe' quello di applicazione del carico posto a L/2 (977.5 mm), e il punto B posto a L/4 (488.75 mm). Per quanto riguarda i parametri temporali si e' scelto un tempo finale $T_f = 0.20s$. I risultati sono stati registrati in corrispondenza dei seguenti istanti: $t = 0.05s$, $0.10s$, $0.15s$, $0.20s$.

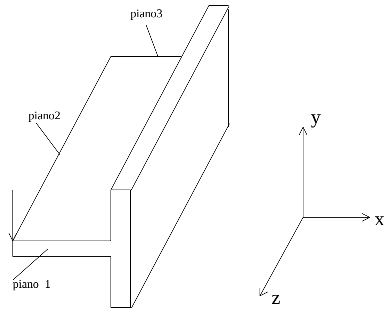


Figure 4: Modello semplificato

Test	Hx (mm)	Hy (mm)	Hz (mm)	N	Elementi	Nodi	Δt
A	5.0	$4.16 \div 5.0$	61.09	2	192	1536	$2 \cdot 10^{-7}$
B	5.0	$4.16 \div 5.0$	61.09	3	192	7252	$1 \cdot 10^{-7}$
C	5.0	$4.16 \div 5.0$	61.09	4	192	15925	$5 \cdot 10^{-8}$

Table 2: Proprietá del modello SEM

Il time_step (Δt) e' stato scelto in base alla minima distanza internodale Δx ed alla massima velocita' di propagazione delle onde nel materiale c_{max} imponendolo inferiore al limite di stabilitá CFL dello schema esplicito di avanzamento in tempo adottato: $\Delta t = 0.5\frac{\Delta x}{c_{max}}$.
La tabella 2 riporta le caratteristiche della mesh realizzata (vedi anche Figura 5), il grado spettrale (N) ed il time-step (Δt).

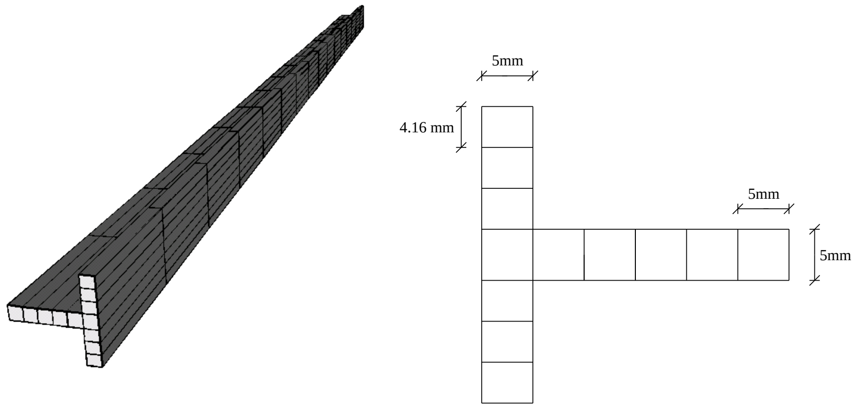


Figure 5: Mesh spettrale

4 Simulazione con ANSYS

Per ottenere un confronto dei risultati ottenuti con la metodologia SEM si e' utilizzato ANSYS un codice commerciale basato sul metodo degli elementi finiti, largamente impiegato nello studio di problemi simili. Il modello realizzato con ANSYS si differenzia da quello utilizzato per gli spettrali solo per le dimensioni assunte per gli elementi, la mesh risulta molto piu' fitta, le sue caratteristiche sono riportate nella tabella 3 e nella figura 6. Le condizioni di carico e vincolo corrispondono esattamente a quelle adottate nell'analisi con gli elementi spettrali.

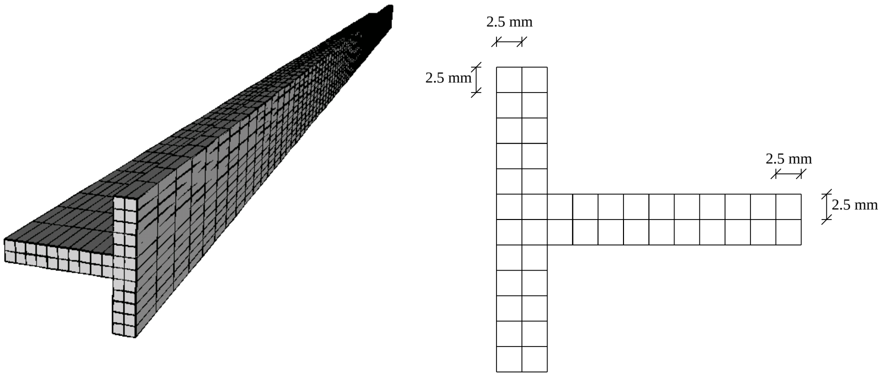


Figure 6: Mesh ANSYS

I parametri della simulazione in ANSYS sono stati scelti diversamente dalla simulazione SEM,

Hx (mm)	Hy (mm)	Hz (mm)	Elementi	Nodi	Δt
2.50	2.50	12.22	3520	5589	$1 \cdot 10^{-6}$

Table 3: Proprietá del modello FEM

questo codice infatti consente di realizzare simulazioni con metodi espliciti di integrazione in tempo e tecniche "element by element" per il calcolo delle foze elastiche e delle sollecitazioni, solo attraverso l'utilizzo di un pacchetto separato LS-DYNA.
E' stato pertanto necessario utilizzare un metodo implicito di avanzamento in tempo. L'uso di questa metodologia comporta la risoluzione di un problema elastico ad ogni time step, con evidenti problemi in termini di occupazione di memoria in caso si utilizzi un metodo diretto per la risoluzione dei problemi elastici (in quanto risulta necessario mantenere in memoria la matrice di stiffness dell'intero modello), e/o di tempo di calcolo, soprattutto nel caso si scelga un metodo iterativo per la risoluzione dei problemi elastici.
Di fatto date le dimensioni del modello impiegato, é stato necessario impiegare una metodologia detta "ridotta", che ha consentito di portare a termine la simulazione in tempi ragionevoli e con sufficiente accuratezza.
La metodologia in questione é molto vicina alla decomposizione modale, si selezionano, in parte dall'utente, in parte in automatico un certo numero di gradi di libertá denominati MASTER, sulla base dei quali verrá descritto il comportamento dinamico dell'intero sistema, e risolvendo una serie di problemi statici vengono calcolate le matrici di inerzia e di rigiditá relative a questi gradi di libertá. Il metodo implicito di avanzamento in tempo viene applicato a questo sottoinsieme di nodi e alle relative matrici, cosí calcolate. Le dimensioni del problema risultano molto ridotte.
Una volta ottenuto il risultato cercato si passa ad una fase di "espansione" dei risultati in cui il risultato in termini di spostamento e delle quantitá derivate viene estrapolato per tutti i nodi del modello sulla base dei risultati dei nodi MASTER.
Un procedimento come quello descritto fornisce risultati che rappresentano una approssimazione della soluzione teoricamente ottenibile con una simulazione FEM sull'intero modello, che peraltro a sua volta costituisce comunque una approssimazione del reale fenomeno fisico. Tali risultati sono validi fintanto che il contenuto in frequenza del carico applicato non risulta particolarmente ricco.
Se si prendono come riferimento i modi propri di vibrare della struttura, dal confronto con l'analisi in frequenza del carico applicato si puó determinare la pulsazione dell'ultimo modo di vibrare eccitato dal carico in questione che puo' essere indicato con ω_u; un modello numerico puó fornire

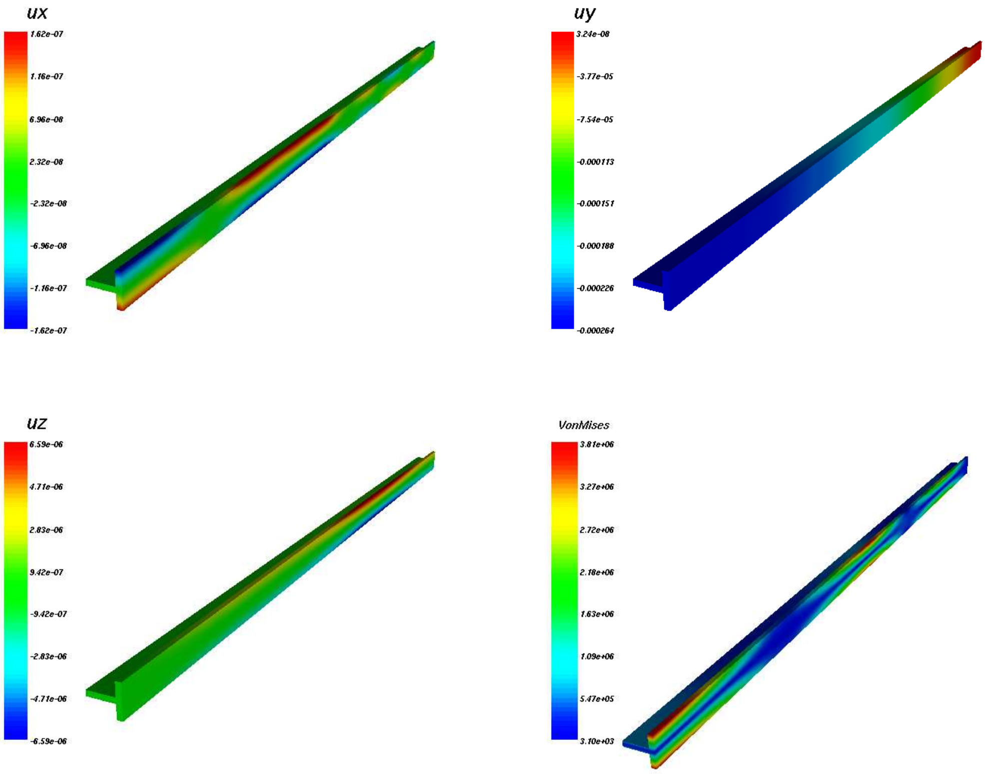


Figure 7: Risultati ELSE: spostamenti e sollecitazione equivalente a 0.05s

risultati accurati se e' in grado di descrivere modi di vibrare, autovettori del sistema, caratterizzati da frequenze proprie, e quindi autovettori, indicativamente almeno quattro volte superiori ad ω_u. Sulla base di queste considerazioni, dato che la documentazione di ANSYS suggerisce un numero di nodi master almeno doppio del numero di frequenze proprie che si vogliono risolvere, si é scelto di utilizzare 200 nodi master, che dovrebbero essere sufficenti per descrivere fenomeni dinamici caratterizzati da frequenze fino a $30000 Hz$.
Il time step é stato scelto prossimo al valore impiegato nelle analisi con il metodo esplicito usato in ELSE, qui non ci sono vincoli di stabilitá del calcolo ma si é comunque cercato di mantere la stessa accuratezza dell'algoritmo di avanzamento in tempo.

5 Risultati

Nella Figura 7 sono riportati i plot delle componenti di spostamento, e la sollecitazione equivalente di Von Mises, all'istante $t = 0.05s$ ottenuti con il codice ELSE.
Lo spostamento in direzione verticale calcolato dal codice spettrale per i punti A e B é riportato nelle Figure 8 e 9, si puó notare come giá con un grado spettrale 2 si ottengano risultati accettabili, che migliorano salendo con il grado spettrale, ma che giá con un grado 3 possono ritenersi ottimali dato che non si avverte una apprezzabile differenza tra tali risultati e quelli ottenuti con portando il grado a 4.

I risultati del codice ELSE (grado spettrale 3) per il punto A posto in mezzeria sono confrontati in Figura 11 con quelli ottenuti con ANSYS.

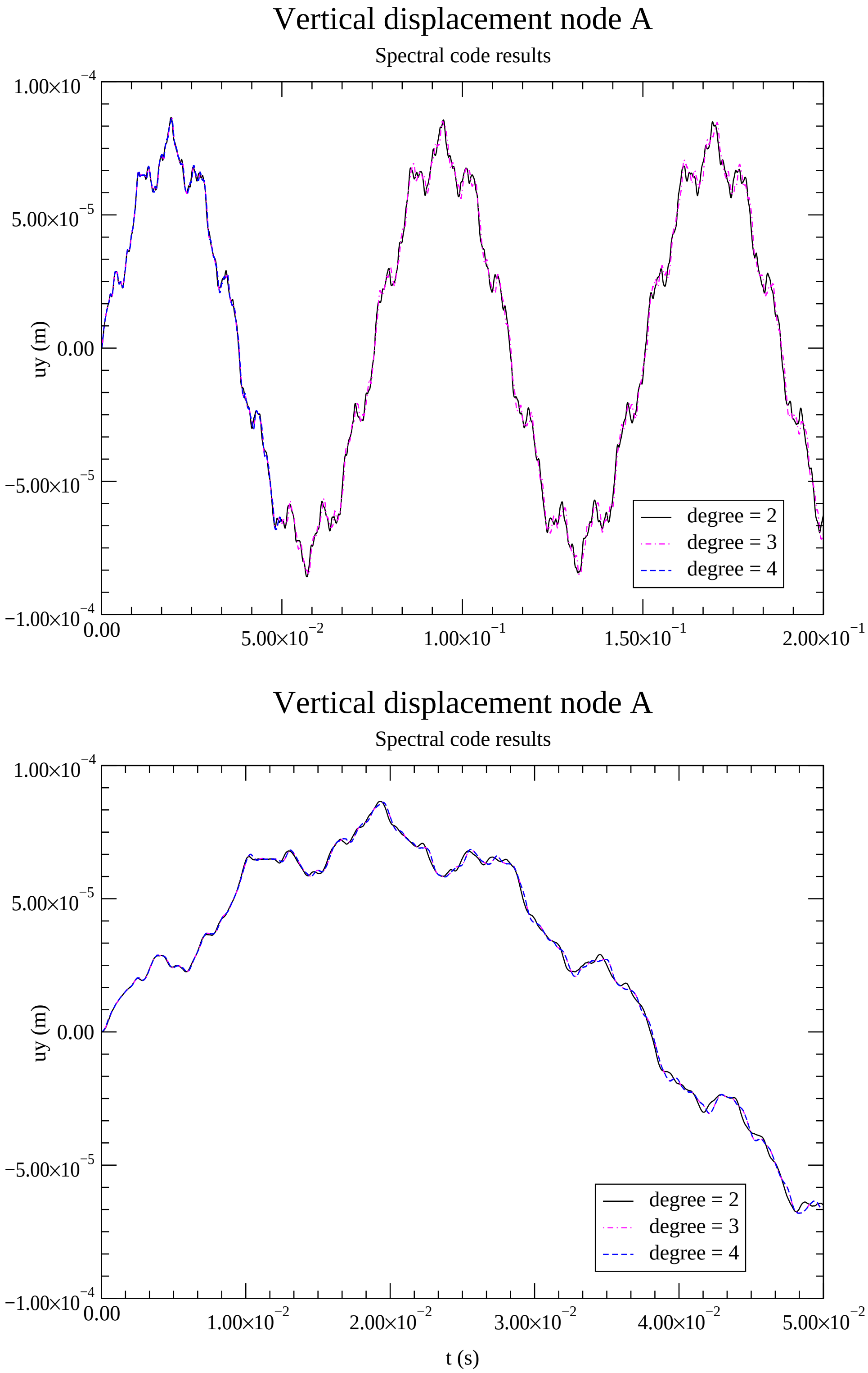
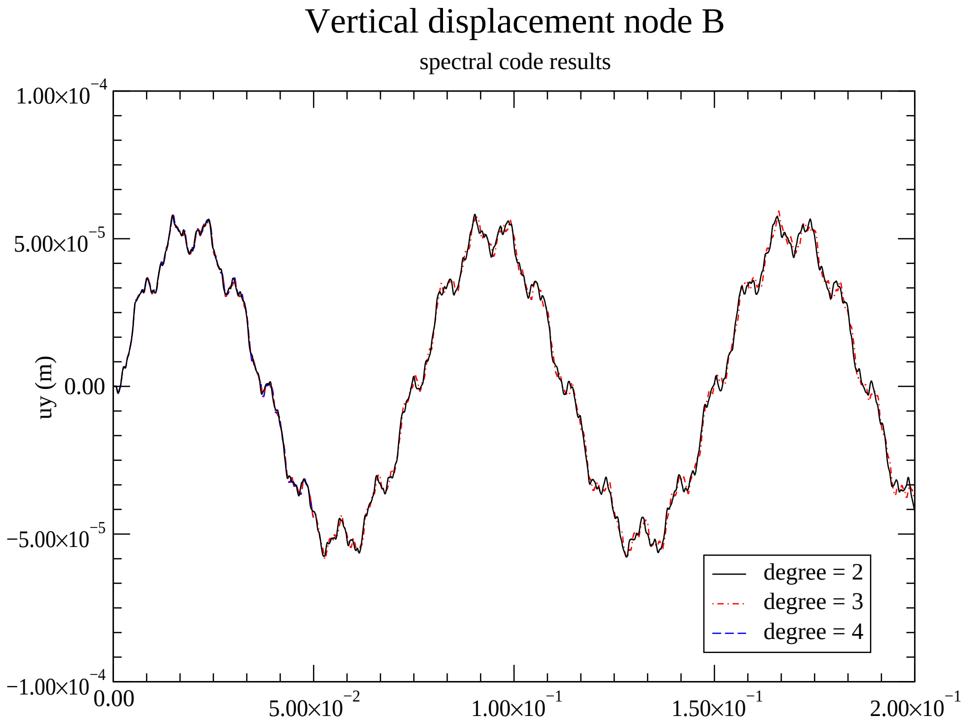


Figure 8: Risultati SEM: spostamenti verticali del punto A



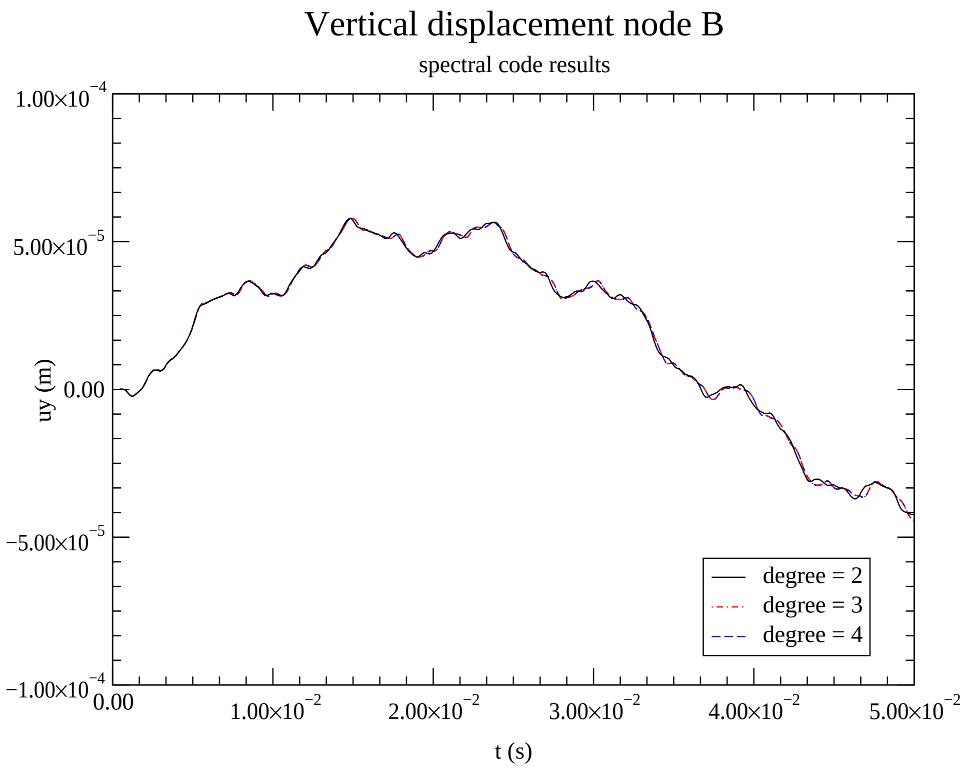


Figure 9: Risultati SEM: spostamenti verticali del punto B

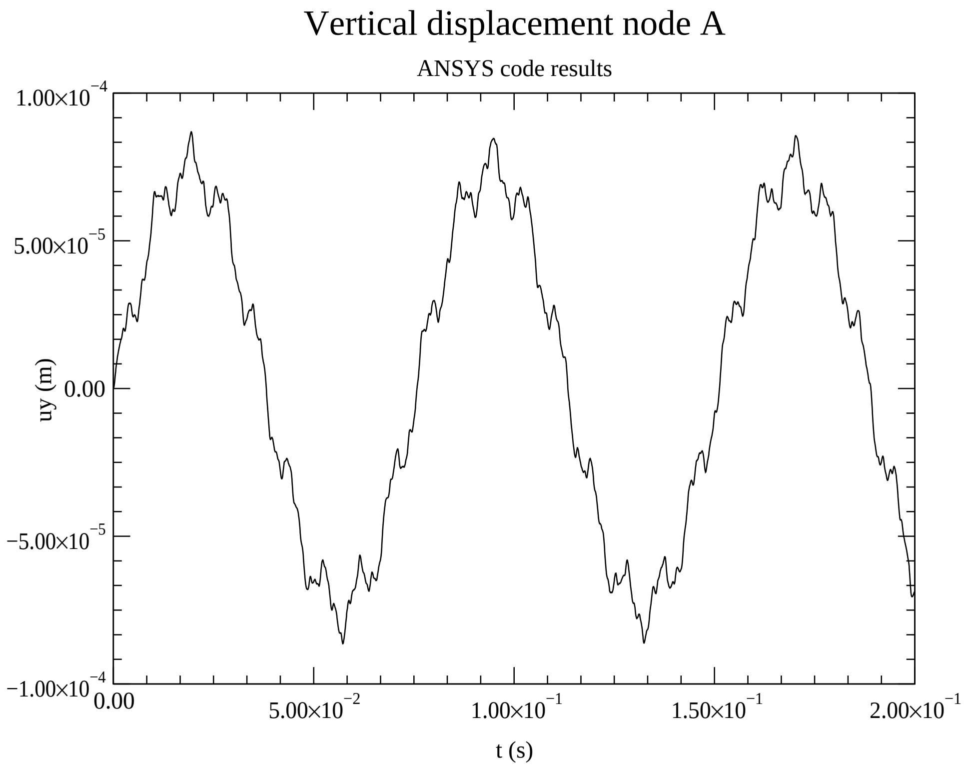


Figure 10: Risultati FEM: spostamenti verticali del punto A

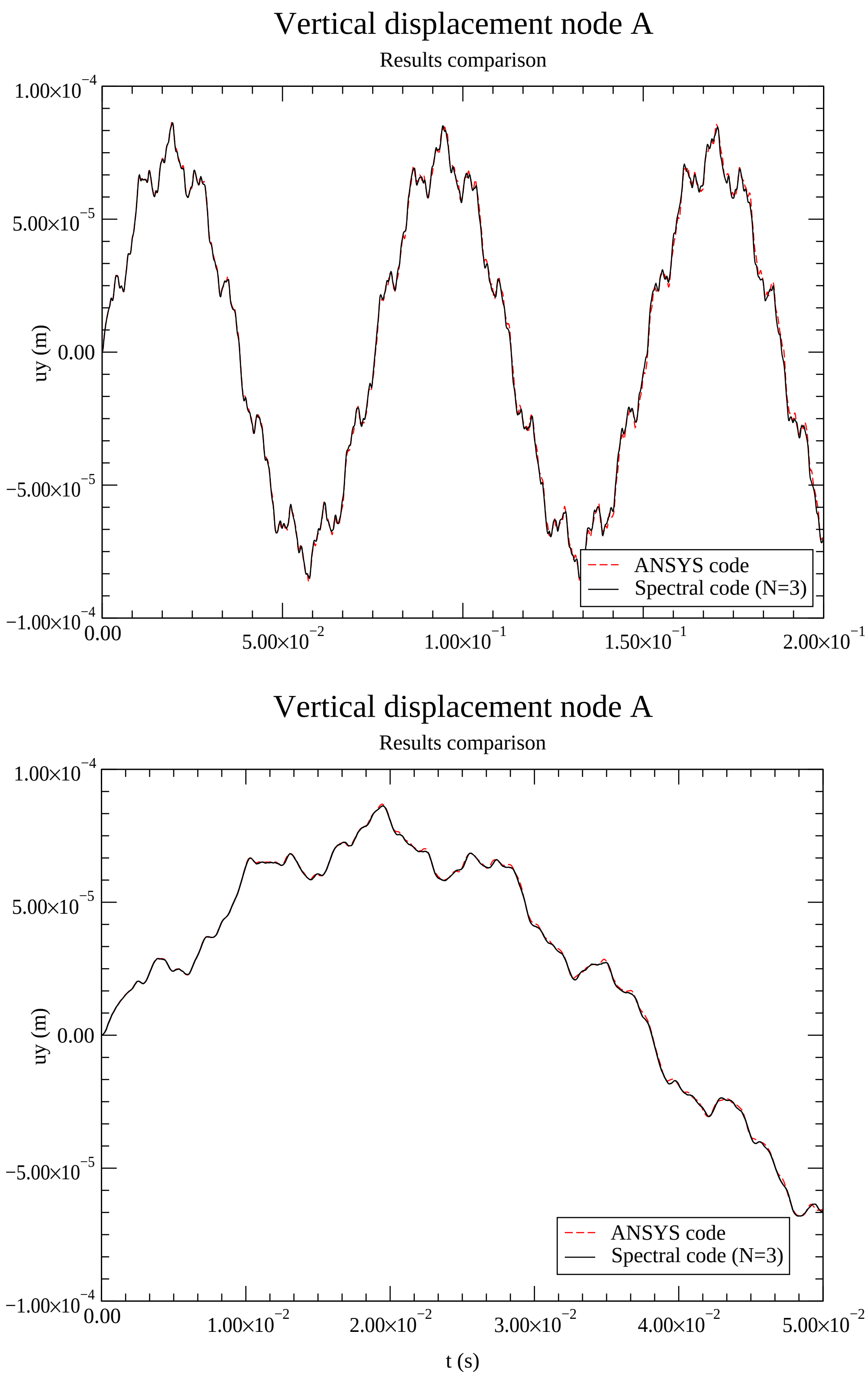


Figure 11: Confronto risultati

Si puó notare un sostanziale accordo nelle soluzioni ottenute con leggere differenze nel contenuto al segnale dovuto agli autovettori di frequenza piú elevata.
I due risultati sono stati confrontati anche in frequenza, mediante una FFT del segnale, riportata in Figura 12. Le linee verticali marcano le frequenze dei modi di vibrare di una trave semplicemente appoggiata, calcolate mediante la teoria monodimensionale. Si puó notare un ottimo accordo tra le due metodologie numeriche. I due metodi offrono risultati coincidenti con la soluzione monodimensionale almeno per le prime frequenze, i risultati tendono poi via via a differire, questo peró dovrebbe essere legato ai limiti del modello analitico monodimensionale piú che ad una inesattezza del risultato numerico: il modello analitico monodimensionale cessa di essere significativo quando al salire della frequenza non possono piú essere trascurati gli effetti tridimensionali di deformazione dell

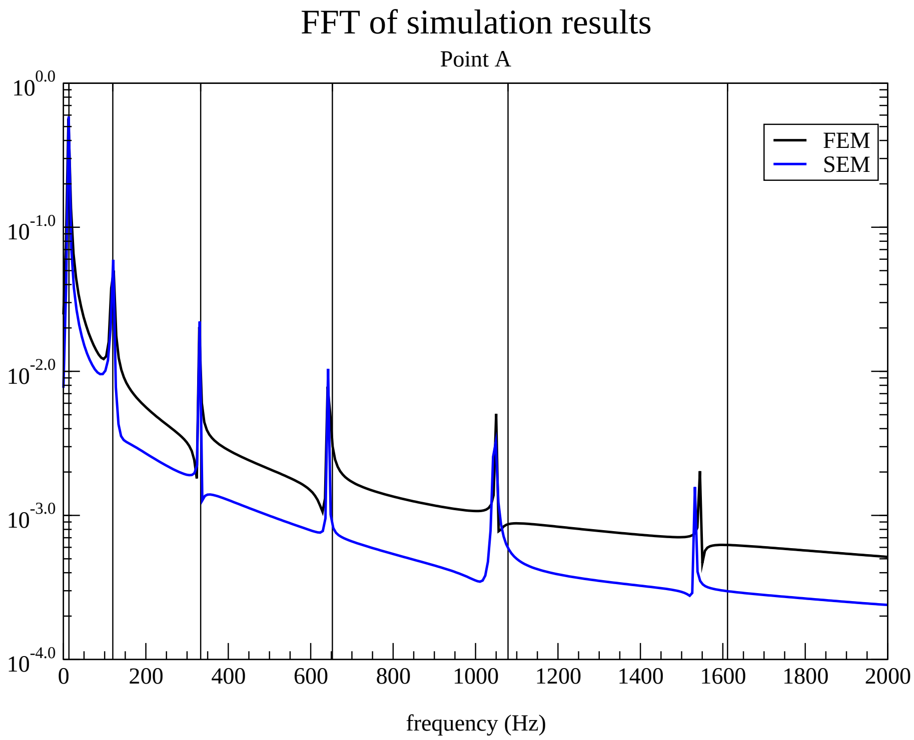


Figure 12: FFT dei risultati numerici e confronto con frequenze analitiche

6 Conclusioni

ELSE é una famiglia di codici basati sul Metodo degli Elementi Spettrali sviluppati al CRS4. In questo rapporto un codice ottimizzato per lo studio della propagazione di onde elastiche in strutture tridimensionali, é stato applicato allo studio di un tipico problema di dinamica strutturale, quello delle vibrazioni indotte da una forza impulsiva su una trave semplicemente appoggiata.
Le frequenze caratteristiche di questa tipologia di problemi sono molto diverse da quelle tipiche dei fenomeni di propagazione ondulatoria, tuttavia il codice spettrale ha dimostrato una ottima robustezza ed accuratezza nel risolvere questo tipo di problemi, risultando competitivo con un codice FEM commerciale di provata affidabilitá come ANSYS.
I risultati ottenuti con le due metodologie numeriche si sono dimostrati infatti in ottimo accordo, sebbene i metodi di analisi utilizzati fossero notevolmente diversi.

References

[1] Faccioli, E., F. Maggio, A. Quarteroni, and A. Tagliani, *Spectral-domain decomposition methods for the solution of acoustic and elastic wave equations*, Geophysics, 61 (4), pp. 1160-1174, 1996

[2] Faccioli, E., F. Maggio, R. Paolucci, and A. Quarteroni, *2D and 3D elastic wave propagation by a pseudo-spectral domain decomposition method*, Journal of Seismology, 1, 237-251, 1997

[3] Casadei, F., and E. Gabellini, *Implementation of a 3D Coupled Spectral Element / Finite Element Solver for Wave Propagation and Soil-Structure Interaction Simulations. Part I - Models*, EUR 17730 EN

[4] Quarteroni, A., and A. Valli, *Numerical approximation of partial differenial equations*, Springer Verlag, Berlin, 1994

[5] Belluzzi, O., *Scienza delle costruzioni*, Zanichelli, Bologna, 1992

[6] ANSYS Inc., *ANSYS 5.3 Reference Manual*, 2002

Acknowledgments

This work has been partly supported by Sardinia Region Authorities and MURST (Ministero per l'Universitá e la Ricerca Scientifica e Tecnologica).