



Progetto MIUR DM 593 no. 12656
decreto dirigenziale n. 2266 del 29/12/2003

Vento di Sardegna

Obiettivo Realizzativo n. 1

ORGANIZZAZIONE

Attività 1.3B2

Messa a punto e integrazione dei diversi software per la simulazione

Sottoattività:

appendici del Report VdS1.3B1

- *Vento apparente e strato limite atmosferico*
- *Forze e momenti generati dal carico aerodinamico*
- *Il codice di calcolo*

partner responsabile

CRS4

Autori:

G. Delussu, M. Mulas e M. Talice (CRS4)

31 Gennaio 2005

1. VENTO APPARENTE E STRATO LIMITE ATMOSFERICO

1.1. *Vento reale e vento apparente*

Per vento reale si intende il vento che è misurato da un osservatore in un riferimento stazionario. Anche nella totale assenza di vento reale, per effetto del moto della barca, un osservatore che si trova a bordo di essa percepisce un vento la cui direzione e intensità coincidono con quelle del moto della barca, ma di verso opposto. È il così detto vento di velocità. In presenza del vento reale, il vento percepito dall'osservatore posto sulla barca, sarà la composizione vettoriale del vento reale stesso e del vento di velocità. Tale vento è il vento apparente. Al variare della direzione dalla quale il vento apparente soffia rispetto alla direzione di moto della barca, si distinguono le varie andature della barca stessa. I nomi delle diverse andature sono riportati nella Figura 1. In Figura 2 è esemplificata la definizione di vento apparente come composizione vettoriale, in due differenti andature.

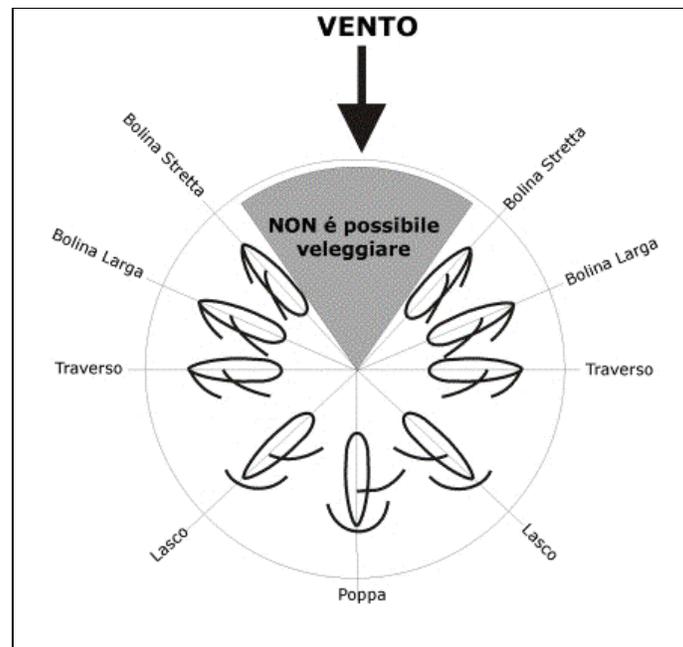


Figura 1: nomi delle diverse andature al variare della direzione del vento apparente rispetto alla direzione del moto della barca

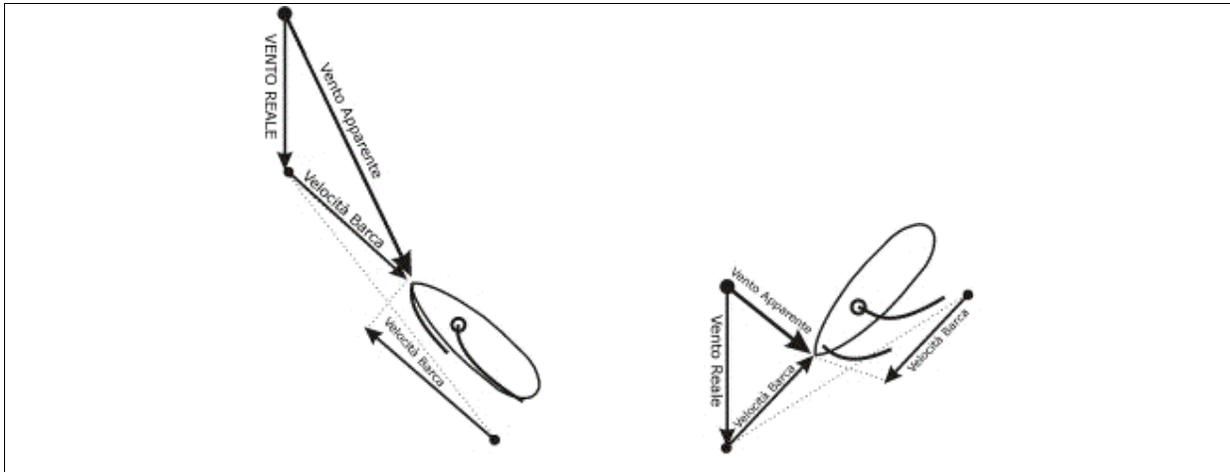


Figura 2: definizione del vento apparente come composizione vettoriale del vento reale e del vento di velocità per due andature di bolina e di traverso

1.2. Variabilità del vento con la quota: lo strato limite atmosferico

Un altro aspetto importante di cui si deve tenere conto nello studio dell'aerodinamica delle vele, è che il vento non è costante al variare dell'altezza dalla superficie dell'acqua. In prossimità della superficie dell'acqua, infatti, la velocità del vento diminuisce, per annullarsi in corrispondenza del pelo libero per effetto delle forze di attrito viscoso. Si genera così un vero e proprio strato limite. Il risultato è che la velocità del vento è in generale di diversi nodi maggiore in penna d'albero che all'altezza del ponte della barca. Ricordando che il vento apparente altro non è che la combinazione vettoriale del vento reale e di quello di velocità, una variazione dell'intensità del vento reale alle differenti altezze lungo l'albero della barca, ha come effetto la nascita di una variazione dell'angolo nella direzione del vento apparente lungo l'albero stesso. La legge con la quale varia la velocità del vento con l'altezza dalla superficie dell'acqua, è approssimativamente logaritmica [23]. Una delle espressioni di $V(z)$ di più frequente utilizzo in letteratura è quella dovuta a Paulson (1970), valida in condizioni di stabilità neutra dell'atmosfera:

$$V(z) = \frac{U^*}{k} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (\text{Eq. 1.1})$$

dove: $k = 0.42$ è la costante di von Barman e U^* e z_0 sono rispettivamente la velocità di attrito e l'altezza caratteristica delle onde. Al variare di questi due parametri, si ottengono profili di velocità del vento diversi. Il valore di U^* dipende dalla velocità del vento indisturbato e Ruggles (1970) suggerisce di utilizzare un valore di U^* pari al 4% della velocità del vento a 10 m sopra la superficie dell'acqua. Il valore di z_0 è invece una misura di quanto sono grandi le onde che increspano la

superficie dell'acqua. Ruggles (1970) fornisce una serie di valori di z_0 in funzione delle condizioni marine (scala di Beaufort). La Tabella 1 riporta i valori di z_0 suggeriti da Ruggles.

z_0	Scala di Beaufort	Descrizione condizioni mare
0.001 – 0.01	0, 1	Mare calmo e aria stagnante
0.5	2, 3	Mare increspato e brezza leggera
5.0	4	Onde medie e brezza moderata
20.0	5, 6	Onde grandi e brezza sostenuta

Tabella 1: valori di z_0 in funzione delle condizioni marine (scala di Beaufort)

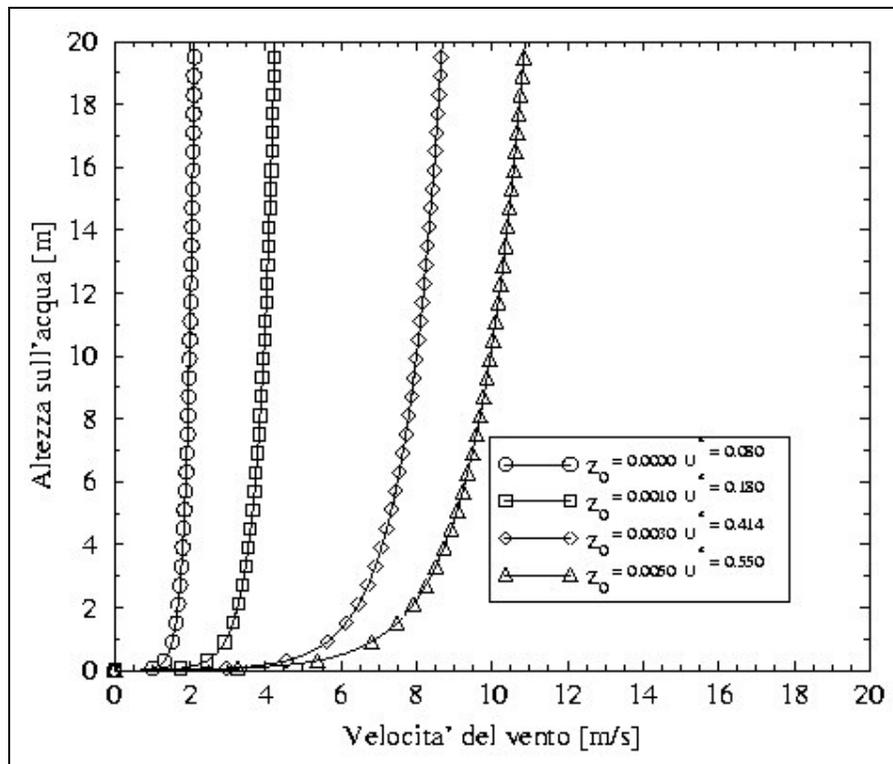


Figura 3: profili del vento calcolati con la legge di Paulson per quattro differenti coppie di valori per U^* e z_0

La Figura 3 mostra il profilo di velocità del vento ottenuto con la legge di Paulson per diverse dimensioni della rugosità superficiale (altezza delle onde). Si noti come la velocità di attrito debba aumentare per mantenere il gradiente prefissato.

Si è detto che la legge di Paulson è valida in condizioni di stabilità neutra dell'atmosfera. Per la determinazione delle condizioni di stabilità si fa riferimento alla stratificazione dell'aria in

prossimità della superficie dell'acqua. Sia in condizioni di atmosfera stabile che instabile la legge di Paulson richiede l'aggiunta di nuovi termini a secondo membro.

Infine, occorre osservare che anche le vele stesse contribuiscono a deflettere la direzione del vento.

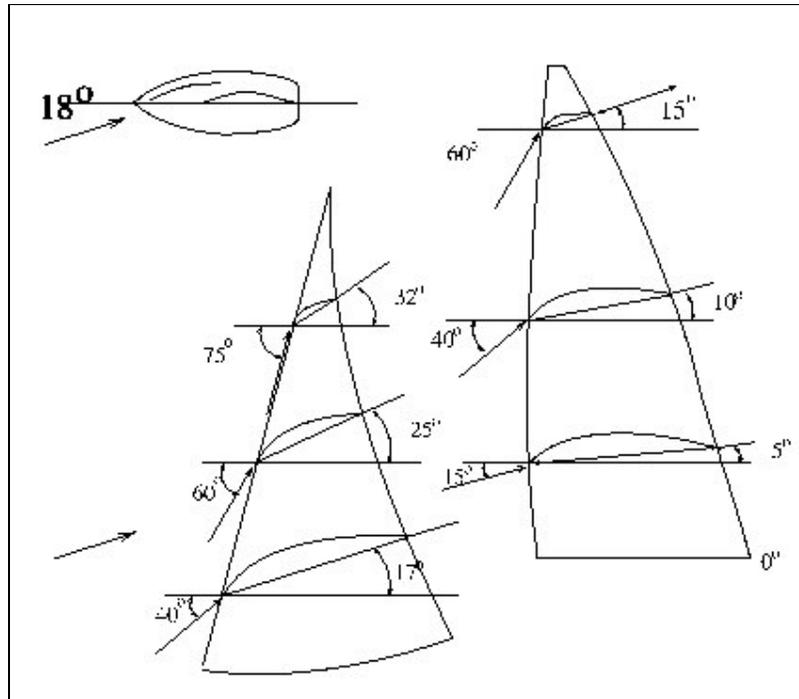


Figura 4: Effetto di upwash: la presenza delle vele modifica la direzione del flusso incidente su di esse

A titolo di esempio in Figura 4 è illustrato l'effetto della presenza delle vele sulla direzione del vento incidente. Come rappresentato nella Figura 4 si consideri il caso di una barca che si muova in andatura di bolina stretta sotto un vento apparente di 18° . Nella parte in alto della Figura 4 sono riportate le tracce della randa e del fiocco su un piano di sezione perpendicolare all'albero. La coppia di vele risulta ben allineata con la direzione del vento apparente. Se però si esaminano le reali condizioni di lavoro delle singole vele, si può osservare come nel caso del fiocco, l'angolo reale di ingresso del vento vari da circa 40° sino a circa 75° spostandosi dalla base alla sua testa. Comportamento analogo si ha anche nel caso della randa, con l'unica eccezione delle sezioni più basse dove la presenza del fiocco riesce a guidare meglio il flusso d'aria che si instaura tra le vele. Muovendosi però verso la penna dell'albero, anche nel caso della randa si ha un considerevole effetto di rotazione della direzione del vento incidente. Questo fenomeno, proprio delle vele a pianta triangolare, è noto con il termine anglosassone di "upwash" [2]. Tale comportamento dipende anche dall'angolo di attacco utilizzato, più grande è l'angolo più grande è l'effetto di rotazione. Inoltre, ai più piccoli angoli di attacco, la differenza nell'angolo di rotazione della direzione del vento incidente tra il piede e la testa delle vele, è proporzionalmente più piccola che nel caso di grandi angoli di attacco.

2. FORZE E MOMENTI GENERATI DAL CARICO AERODINAMICO

Una barca a vela che navighi in linea retta e a velocità costante, si dice essere in condizioni di equilibrio e la somma delle forze e dei momenti (intorno ad un qualsiasi asse) agenti sulla barca deve essere nulla. Le forze di maggiore interesse sono quelle che agiscono sul piano dell'acqua, mentre i momenti più importanti sono quelli che agiscono lungo l'asse centrale della barca, definito come l'asse che corre lungo la linea di mezzeria dello scafo, da prua a poppa [17]. Nell'equilibrio delle forze occorre ovviamente anche tenere conto delle forze verticali, generate dal moto della barca, specialmente nel caso in cui si abbia la presenza della chiglia. L'equilibrio di dette forze è però sostanzialmente dominato dalla forza peso della barca e dalla forza di galleggiamento, così da non giocare un ruolo particolarmente importante nella determinazione delle prestazioni dell'imbarcazione.

2.1. Forze nel piano dell'acqua

La Figura 5 mostra le forze agenti su una vela in un piano parallelo alla superficie dell'acqua. Se si considera la direzione del vento apparente V_A , la forza totale $F_{TOT_{vele}}$ può essere scomposta nelle due componenti di portanza (L), agente in direzione perpendicolare a V_A , e di resistenza (D), agente lungo la direzione di V_A [5]. La resistenza (D) comprende tanto la resistenza indotta della vela, quanto le resistenze di attrito e di pressione del complesso di vele, albero, scotte e scafo.

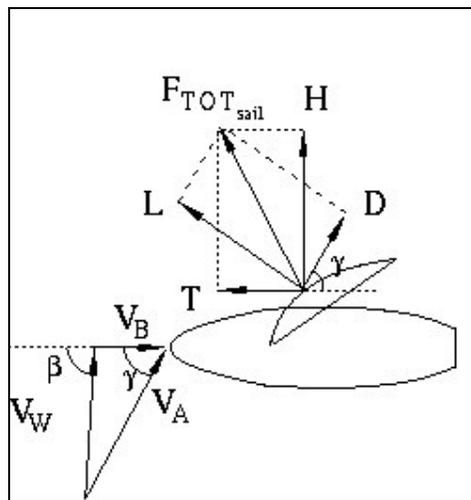


Figura 5: forza totale agente sulla vela e sua scomposizione lungo V_A e V_B

Dal punto di vista dello scafo, è più interessante considerare come direzione di riferimento quella della velocità della barca, definita dal vettore vento di velocità V_B di Figura 5. Rispetto alla direzione del moto la forza totale agente sulla vela, $F_{TOT_{vele}}$, può essere divisa nelle due componenti di spinta (T), agente lungo la direzione di V_B , e di forza sbandante (H), agente in direzione perpendicolare a V_B . Se con γ si indica l'angolo tra V_A e V_B , si possono scrivere semplici relazioni geometriche di passaggio dal sistema di componenti (L, D) a quello (T, H):

$$T = L \sin \gamma - D \cos \gamma$$

$$H = L \cos \gamma + D \sin \gamma \quad (\text{Eq. 2.1})$$

La Figura 6 mostra il sistema di forze agenti su scafo e sartie nel piano dell'acqua: la forza di resistenza (R) e la forza laterale (L), agenti rispettivamente nella direzione nella direzione del moto della barca e in quella ad essa perpendicolare. Si noti come in generale il moto della barca avvenga lungo una direzione non esattamente coincidente con quella dell'asse dello scafo, esistendo un angolo ξ , detto angolo di deriva o di scarroccio. Le due componenti R ed S possono essere composte nella forza totale agente sullo scafo, $F_{TOT_{scafo}}$. La resistenza R è in generale la somma delle resistenze di attrito dello scafo e delle appendici idrodinamiche (chiglia, timoni, ecc), della resistenza di pressione, di quella indotta e della resistenza dovuta al moto ondosio. Per venti leggeri, cioè a bassa velocità della barca, la resistenza di attrito è prevalente sulle altre, ma al di sopra di una certa velocità critica, la così detta "hull speed" la resistenza d'onda aumenta rapidamente. La velocità critica è raggiunta quando il numero di Froude raggiunge il valore di circa 0.35.

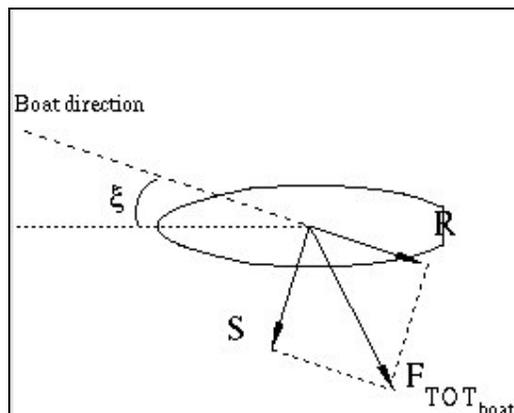


Figura 6: equilibrio delle forze agenti sullo scafo nel piano dell'acqua

Si ricorda che il numero di Froude Fr è definito come: $Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$, dove V è la velocità della barca, g ,

l'accelerazione di gravità ed L una lunghezza caratteristica, a esempio, la lunghezza dello scafo. Fisicamente il numero di Froude rappresenta il rapporto tra forze inerziali e gravitazionali e fornisce una misura del numero di onde lungo la lunghezza dello scafo. In particolare, per un numero di Froude pari a 0.4, esiste una sola onda che copre l'intera lunghezza dello scafo.

Infine, la Figura 7 mostra l'equilibrio dei momenti agenti sullo scafo. Per la manovrabilità della barca, il momento delle forze S ed R già discusse in Figura 6, deve essere contrastato agendo sul timone della barca. Il timoniere, agendo sulla barra del timone, impone ad esso un certo angolo δ rispetto alla direzione dell'asse della barca, determinando così l'insorgenza di un sistema di forze idrodinamiche del tutto analoghe a quelle già esaminate nel caso dello scafo. Per un certo angolo di timone δ il momento di S ed R risulterà uguale e opposto a quello di S_{Timone} e di R_{Timone} , e il sistema sarà in equilibrio.

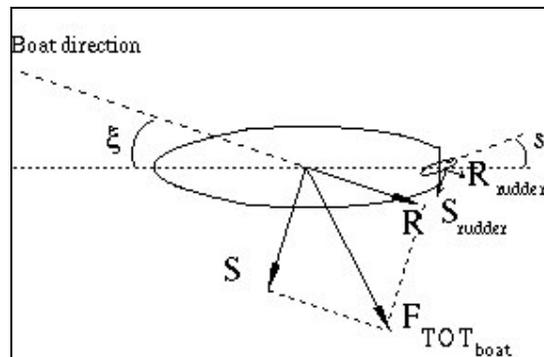


Figura 7: equilibrio dei momenti dovuto all'azione del timone

2.2. Forze in un piano perpendicolare al piano di simmetria dello scafo

Le forze agenti su un piano perpendicolare al piano di simmetria dello scafo, sono quelle riportate nella Figura 8.

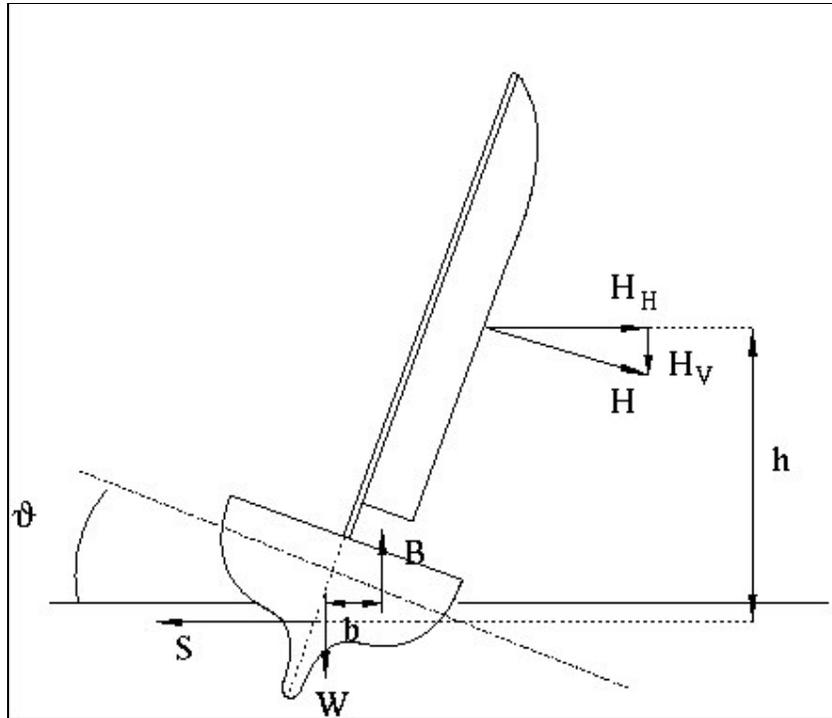


Figura 8: equilibrio di forze e momenti in un piano perpendicolare al piano di simmetria dello scafo

Le condizioni di equilibrio delle forze e dei momenti agenti in questo piano, possono essere scritte come:

$$H_H = S$$

$$W \cong B$$

$$W \cdot b = H_H \cdot h$$

Dove:

- H_H è la componente orizzontale della forza di sbandamento H , applicata nel centro degli sforzi della vela;
- S è la forza laterale, applicata nel centro di resistenza laterale della barca;
- W è la forza peso della barca, applicata nel centro di gravità della barca stessa;
- B è la forza di galleggiamento;
- b è la distanza tra il centro di gravità della barca e il punto di applicazione di B ;
- h è la distanza tra il centro degli sforzi della vela e il centro di resistenza laterale della barca.

La forza di sbandamento H può essere scomposta nelle sue componenti orizzontale e verticale. La componente verticale di H può di fatto essere trascurata per il calcolo delle condizioni di equilibrio di forze e momenti. In Figura 8 è riportato l'angolo di sbandamento della barca θ . Esso è l'angolo generato dall'azione della coppia sbandante $H_H - S$. L'angolo di sbandamento θ tende a crescere

sino a che l'azione sbandante di $H_H - S$ non è equilibrata dalla coppia raddrizzante $B - W$, il cui braccio, b , è molto più piccolo del braccio, h , di $H_H - S$. A seconda del tipo di barca il meccanismo di generazione della coppia raddrizzante è diverso. Ad esempio, nel caso di dinghies (Optimist, 4.20, ecc) da competizione, il momento raddrizzante è di fatto generato dal peso dell'equipaggio, nel caso dei catamarani dalla forma e dislocazione degli scafi, negli yachts dal peso della chiglia. Nel caso specifico dei catamarani è necessario prendere in considerazione altre due forze per valutare le condizioni di equilibrio verticali: la portanza e la resistenza dello scafo. La portanza delle superfici plananti è dovuta a due effetti distinti: il primo è la reazione positiva del fluido contro la parte inferiore degli scafi in moto su di esso; il secondo effetto che genera la portanza è detto contributo di galleggiamento, ed è associato alle pressioni statiche che corrispondono alle condizioni di draft e trim vigenti. A basse velocità, l'effetto di galleggiamento è predominante, mentre ad alte velocità è il primo contributo sopra descritto, che determina la portanza. In pratica, il contributo idrodinamico alla portanza deve essere preso in considerazione quando il rapporto tra spinta e peso è più grande di 0.1. Quando l'imbarcazione sta planando, accanto alla portanza idrodinamica, si genera anche una resistenza idrodinamica. Allorchè la velocità della barca aumenta e si instaurano le condizioni di planata, la resistenza di attrito e quella d'onda diminuiscono, mentre aumenta la resistenza idrodinamica.

2.3. Forze nel piano di simmetria dello scafo

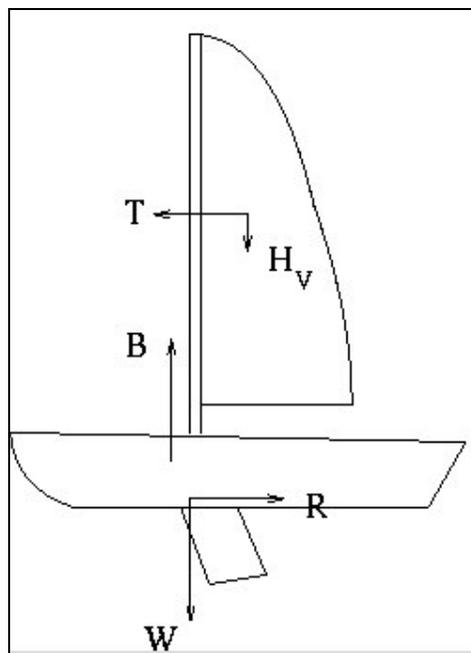


Figura 9: le forze agenti sul piano di simmetria della barca

La Figura 9 mostra le forze agenti nel piano di simmetria della barca. Le condizioni di equilibrio orizzontale e verticale delle forze sono già state descritte in precedenza. Rimane qui da esaminare la condizione di equilibrio per il momento affondante, quello cioè che, se non equilibrato, porta la prua ad abbassarsi o ad alzarsi sull'acqua. L'esame della Figura 9 mostra come in condizioni di equilibrio la coppia generata dalla resistenza dello scafo R , e dalla spinta sulle vele, T , sia equilibrata dalla coppia generata dalla forza peso e da quella di galleggiamento.

3. IL CODICE DI CALCOLO

3.1. Generalità

Il codice utilizzato per le simulazioni è un codice CFD parallelo MPI, ai volumi finiti, multi-blocco, che risolve le equazioni di Eulero e Navier-Stokes in forma compressibile, in cui tutti i possibili accoppiamenti tra la dinamica e la termodinamica sono presi in considerazione. Si tratta dunque del modello matematico più generale per lo studio del flusso di un fluido qualsiasi.

Il codice risolve il sistema accoppiato delle equazioni di continuità, quantità di moto ed energia per le componenti della velocità, la pressione e la temperatura. Una volta che i valori di u , v , w , p e T sono stati aggiornati, viene fatto uso di una legge arbitraria di termodinamica. I flussi convettivi attraverso le interfacce della discretizzazione spaziale ai volumi finiti, sono calcolati mediante uno schema TVD di Roe, al secondo ordine. Un algoritmo multi-grid con cicli di tipo a V, in unione con un metodo di avanzamento nel tempo di Runge-Kutta a cinque stadi, è usato per accelerare la convergenza del metodo verso la soluzione stazionaria. Questa particolare formulazione, tipica delle applicazioni aerodinamiche, mostra però un'eccellente efficienza anche per flussi incompressibili, come pure per flussi di fluidi incompressibili, una volta accoppiata con un metodo di preconditionamento. A questo scopo è stato scelto il preconditionatore di Merkle, in quanto può essere facilmente formulato per un'equazione di stato arbitraria data come una relazione funzionale di due variabili (solitamente la pressione p e la temperatura T), o anche in forma tabellare, letta come file di ingresso, e usata con un'interpolazione bilineare.

Il codice implementa alcuni tra i più popolari modelli di turbolenza, sia a una sia a due equazioni.

3.2. Il modello matematico

3.2.1. Le equazioni di Navier-Stokes

Il sistema di Navier-Stokes, in forma comprimibile, si scrive:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j + \delta_{ij} p - \tau_{ij}) = \rho g_i \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho H u_j - u_i \tau_{ij} + q_j) = \rho \dot{Q} \end{cases} \quad (\text{Eq. 3.1})$$

Le tre equazioni di continuità, quantità di moto ed energia, rappresentano i principi di base della meccanica e della termodinamica, vale a dire la conservazione della massa, la seconda legge di Newton e la conservazione dell'energia totale. Le equazioni sono state scritte in termini delle così dette variabili conservative (la densità ρ , l'energia totale per unità di volume ρE , e le tre componenti della quantità di moto ρu_i) prese come variabili dipendenti. L'entalpia totale per unità di volume può quindi essere ricavata come: $\rho H \equiv \rho E + p$. Le relazioni costitutive sono date dalle leggi di Newton e di Fourier per la viscosità e la conduttività termica, che rappresentano un modello generale per la maggior parte dei fluidi di interesse ingegneristico:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \\ q_j &= -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.2})$$

Le equazioni di sopra legano il tensore degli sforzi viscosi τ_{ij} e il flusso termico convettivo q_j , al tensore dei gradienti di velocità e al gradiente di temperatura, rispettivamente. Essi rappresentano due termini di diffusione fisica, più esattamente il trasporto molecolare di quantità di moto e di energia, e permettono una valutazione quantitativamente corretta dei processi termodinamici irreversibili che occorrono nei flussi reali, soddisfacendo al secondo principio della termodinamica. L'energia totale per unità di massa, E , include sia l'energia interna sia quella cinetica, come pure l'energia gravitazionale $\varphi = gz$. Il sistema è completamente accoppiato tramite l'uso di un'equazione di stato generale della forma:

$$a = a(p, T) \quad (\text{Eq. 3.3})$$

in cui "a" rappresenta una qualsiasi variabile termodinamica, quale la densità, l'entalpia o la velocità del suono, espressa in termini della pressione p e della temperatura T .

3.2.2. Compressibilità di un fluido e di un flusso

Il sistema di equazioni precedentemente scritto è il più generale in quanto permette lo scambio reversibile tra energia cinetica ed energia interna che può avvenire a spese delle variazioni di densità, includendo cioè la compressibilità del fluido. Questo meccanismo, nascosto nella formulazione delle equazioni, può tuttavia essere messo in luce scrivendo un'equazione di trasporto per l'energia cinetica $V^2/2$ (moltiplicando scalarmente l'equazione della quantità di moto per il vettore velocità) e sottraendola all'equazione dell'energia per ottenere un'equazione per l'energia

interna “e”. Il termine di scambio è quello responsabile dell'accoppiamento tra le equazioni della quantità di moto ed energia.

Un altro modo di identificare la reale compressibilità del flusso – fluido, si ottiene differenziando l'equazione di stato:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \frac{Dp}{Dt} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \frac{DT}{Dt} \quad (\text{Eq. 3.4})$$

che permette di mettere in relazione le variazioni di densità associate a una particella di fluido che si muove con il flusso, alle variazioni di pressione e di temperatura, piuttosto che a un termine particolare nelle equazioni alle derivate parziali del sistema. Le due derivate parziali della densità rappresentano i coefficienti di compressibilità del fluido a temperatura e a pressione costante (spesso indicati con $\rho\chi$ e $-\rho\beta$).

Fluidi incompressibili hanno $\beta = \chi = 0$, il che implica che la densità è costante ovunque. Ciò a sua volta inibisce la possibilità di scambio tra energia cinetica ed interna, cosicchè l'equazione dell'energia può essere tralasciata e scomparire dal sistema. D'altro canto, nei tipici flussi compressibili propri della gas dinamica, le variazioni di densità avvengono in associazione con variazioni di pressione, attraverso i coefficienti di compressibilità a temperatura costante:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T = \rho\chi \cong \frac{1}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{D\rho}{\rho} \approx M^2 \quad (\text{Eq. 3.5})$$

dove “c” è la velocità del suono ed “M” il numero di Mach. Ne risulta dunque che le variazioni di densità nei flussi di fluidi compressibili avvengono generalmente se la velocità del fluido è sufficientemente elevata se confrontata con la locale velocità del suono.

Una terza classe di flussi di fluidi è rappresentata dai flussi in regime di convezione naturale (buoyancy) di fluidi incomprimibili. Tali flussi si verificano generalmente a velocità molto basse, se paragonate con la locale velocità del suono. Per effetto delle sorgenti volumetriche di calore, le variazioni di densità sono interamente dovute alle variazioni di temperatura attraverso il coefficiente β , e non agli effetti di comprimibilità che si verificano alle alte velocità. È per questa ragione che questi flussi sono erroneamente chiamati “incompressibili”, il cui vero significato è quello di flusso a basso numero di Mach. Il risultato, comunque, è che il vero meccanismo di scambio tra energia interna e cinetica, acceso dalla presenza del termine sorgente gravitazionale nell'equazione della quantità di moto, è il solo responsabile del moto del fluido, e l'intero sistema è nuovamente completamente accoppiato. Una tipica equazione di stato per flussi in convezione naturale, può essere approssimata come $p = p(T)$, trascurando quindi gli effetti molto piccoli delle variazioni di pressione. Il modello più generale per descrivere questo tipo di flussi è quello di aggiungere la forza

di volume gravitazionale, come termine sorgente nell'equazione della quantità di moto, scrivendola come ρg_i , dove g_i è la componente del vettore gravità in direzione "i". Il gradiente di pressione idrostatico può essere separato dal gradiente totale di pressione ed espresso come $-\rho_0 g_i$, dove ρ_0 è calcolata allo stato di riferimento; quindi il termine sorgente diventa semplicemente: $(\rho - \rho_0)g_i$. Assumendo che in uno stretto intervallo di valori il coefficiente di compressibilità β sia costante, può essere derivata un'equazione di stato generale nella forma $\rho = \rho(T) = \rho_0 \exp[-\beta(T - T_0)]$. Attraverso un'espansione in serie di Taylor per piccoli valori dell'argomento dell'esponenziale, $\beta(T - T_0)$, può essere derivata la cosiddetta approssimazione di Boussinesq, nella quale il termine sorgente diventa: $(\rho - \rho_0)g_i \approx -\rho_0 g_i \beta(T - T_0)$. Con questa forma modificata del termine sorgente, la densità può mantenuta costante in tutto il dominio. Tutte queste forme alternative sono disponibili nel codice di calcolo.

3.2.3. Flussi a bassa velocità e preconditionamento

Sebbene il sistema delle equazioni di Navier-Stokes sia parabolico dal punto di vista matematico, nel regime degli alti numeri di Reynolds i termini di diffusione viscosa, associati con i fenomeni di trasporto irreversibili dovuti alla viscosità e alla conducibilità termica, giocano un ruolo minore nel ridistribuire energia e quantità di moto tra le linee di corrente. Questi fenomeni sono essenzialmente confinati all'interno degli strati limite, mentre il cuore del flusso mantiene il carattere iperbolico tipico dei flussi convettivi, proprio, come detto, degli alti numeri di Reynolds. Il sistema delle equazioni di Eulero, cioè la parte ideale e reversibile dell'intero sistema di Navier-Stokes, rappresenta la pura natura di propagazione di onde, caratteristica dei flussi di fluidi. Gli autovalori della matrice delle equazioni di Eulero, identificano le velocità delle differenti onde che governano la conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia, e che sono rappresentate dalla velocità delle particelle (velocità del fluido), e dalla velocità di due onde acustiche. Essi hanno forma: $u_i, (u_i \pm c)$.

Nei flussi supersonici, tutti gli autovalori della matrice di Eulero sono dello stesso ordine della velocità locale, ed il sistema è ben condizionato. Nei flussi transonici, una delle velocità acustiche vale circa zero, mentre gli altri autovalori sono tutti dello stesso ordine della locale velocità del suono: la matrice del sistema diventa quindi mal condizionata. All'avvicinarsi a zero del numero di Mach, la velocità delle perturbazioni acustiche è molto più grande della velocità delle perturbazioni che si propagano con le particelle di fluido. In termini matematici, quando la velocità del fluido

diventa sempre più piccola, gli autovalori della matrice del sistema di equazioni diventano sempre più sparsi, dando vita ad una matrice di Eulero mal condizionata a velocità del flusso molto basse. Si dice allora che il rapporto tra la velocità acustica e la velocità del fluido cresce illimitatamente. Se si vuole applicare la formulazione numerica completamente compressibile anche al caso dei flussi incompressibili (o a flussi di fluidi incompressibili) ed ai flussi transonici, deve necessariamente essere usata una tecnica di preconditionamento. La moltiplicazione della matrice del sistema di Navier-Stokes per una matrice di preconditionamento, cambia artificialmente le velocità caratteristiche (gli autovalori della matrice) alle quali i segnali si propagano nel fluido: l'uso della tecnica del preconditionamento altera la velocità di propagazione delle perturbazioni acustiche, rendendola dello stesso ordine di grandezza della velocità del fluido. In altre parole, il reale mondo incompressibile, è trasformato in uno altamente compressibile, nel quale la formulazione compressibile dell'algorithmo numerico riacquista la sua efficienza originale.

Il sistema preconditionato delle equazioni di Navier-Stokes, scritto in forma vettoriale compatta, è:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \mathbf{P} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) + \mathbf{P} (\text{viscous fluxes}) = 0 \quad (\text{Eq. 3.6})$$

dove F_x , F_y ed F_z rappresentano le tre componenti del vettore dei flussi non viscosi \vec{F} :

$$F_x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{pmatrix} \quad F_y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{pmatrix} \quad F_z = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 3.7})$$

La tecnica di preconditionamento di Merkle [25] è stata scelta in quanto può essere facilmente formulata per un'equazione di stato arbitraria. La matrice di preconditionamento \mathbf{P} di Merkle è data da:

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} \mathbf{M}_m^{-1} \quad (\text{Eq. 3.8})$$

nella quale \mathbf{M} rappresenta la matrice Jacobiana del vettore delle variabili conservative Q rispetto al vettore delle cosiddette variabili primitive viscosi Q_v :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial Q_v} \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{V} \\ \rho E \end{pmatrix} \quad Q_v = \begin{pmatrix} p \\ \vec{V} \\ T \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 3.9})$$

e dove la matrice \mathbf{M}_m^{-1} rappresenta una forma modificata della matrice \mathbf{M} . Si noti che in assenza di modifiche (cioè quando $\mathbf{M} = \mathbf{M}_m$ e $\mathbf{P} = \mathbf{I}$), si recupera la forma non preconditionata del sistema.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ u\rho_p & \rho & 0 & 0 & u\rho_T \\ v\rho_p & 0 & \rho & 0 & v\rho_T \\ w\rho_p & 0 & 0 & \rho & w\rho_T \\ H\rho_p - (1 - \rho h_p) & \rho u & \rho v & \rho w & H\rho_T + \rho h_T \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. 3.10})$$

La matrice \mathbf{M} contiene termodinamica arbitraria nei termini delle derivate della densità e dell'entalpia rispetto alla pressione e alla temperatura $(\rho_p \quad \rho_T \quad h_p \quad h_T)$, mentre la matrice \mathbf{M}_m contiene la termodinamica modificata nei termini di ρ_p^m e ρ_T^m . La riscaltatura delle velocità caratteristiche è ottenuta attraverso una scelta appropriata dei valori “modificati” dei coefficienti di compressibilità del fluido. Allo scopo di mantenere il numero di condizionamento di ordine unitario, si può mostrare [26] che una scelta appropriata dei coefficienti di compressibilità è: $\rho_T^m = \rho_T$, $\rho_p^m = 1/V_r^2$, dove V_r è un'appropriata velocità di riferimento. Se V_r viene fatta variare attraverso il dominio, la matrice di condizionamento \mathbf{M}_m cambia da punto a punto, e di fatto viene applicata una tecnica di preconditionamento locale. Una buona scelta di V_r è cruciale per la convergenza. V_r dovrebbe essere la più piccola possibile, ma non più piccola di ogni velocità di trasporto locale, per considerazioni di stabilità. Per questo motivo V_r è scelta come la più piccola tra le seguenti velocità:

1. la velocità di convezione locale v
2. la velocità di diffusione della quantità di moto v/Δ_x
3. la velocità di diffusione locale del calore $(v/\Delta_x) \cdot (1/\mathbf{Pr})$

Il primo criterio è quello dominante nei flussi turbolenti, ad alto numero di Reynolds. Malgrado ciò, negli strati limite o in flussi laminari a basso numero di Reynolds, i criteri di diffusione possono giocare un ruolo. Per metalli liquidi, il numero di Prandtl ($\mathbf{Pr} = \nu/\alpha$, rapporto tra la viscosità cinematica e la diffusività termica), è molto minore di 1 (a esempio per sodio liquido $\mathbf{Pr} \approx 10^{-3}$) e il criterio basato sulla velocità di diffusione del calore può diventare importante.

Per di più, V_r non dovrebbe essere più piccola delle altre velocità caratteristiche, quali:

- la velocità locale $\sqrt{\Delta p/\rho}$
- la velocità globale cosiddetta velocità di Brunt – Väisälä $(v/D)\sqrt{Gr}$

dove la prima rappresenta la velocità caratteristica di propagazione delle variazioni di pressione, e la seconda, tipica dei flussi in convezione naturale, rappresenta la massima velocità delle onde di gravità in un flusso turbolento. Il criterio 4 fu introdotto in [28] e può essere trovato anche in [36]. L'efficacia del criterio 5 è al momento ancora sotto investigazione.

Se il valore risultante di V_r (dai criteri da 1 a 5 di sopra), è più grande della velocità del suono “c”, allora “c” è scelta come velocità di riferimento e il coefficiente di compressibilità modificato a temperatura costante è ridefinito come:

$$\rho_p^m = \frac{1}{V_r} - \frac{\rho_T}{\rho h_T} \quad (\text{Eq. 3.11})$$

Questo è il caso dei flussi supersonici, in cui non vi è necessità di preconditionamento e la matrice modificata \mathbf{M}_m riacquista il suo significato fisico ($\rho_p^m = \gamma/c^2 = \rho_p \Rightarrow \mathbf{M}_m = \mathbf{M}$), cosicchè il preconditionamento è localmente ed automaticamente disattivato.

I vantaggi del preconditionamento locale sono stati messi in evidenza da vari autori; per esempio Lee [27] nella sua tesi di Ph.D. fornisce un ampio excursus storico delle ricerche in questo campo, e sottolinea il fatto che le matrici della famiglia di Merkle sono state sviluppate a partire dall’analisi ed ottimizzazione degli autovalori del sistema. Matrici di preconditionamento più efficienti possono essere ottenute ponendo maggior attenzione all’ortogonalità degli autovalori; questo può risultare importante specialmente nei punti di stagnazione del flusso.

A regime stazionario (cioè per $\partial Q/\partial t = 0$), il sistema preconditionato condivide la stessa soluzione con l’originario sistema non preconditionato. L’aggiornamento della soluzione durante il processo iterativo viene fatto in termini delle variabili primitive viscosi Q_v , vale a dire pressione, temperatura e componenti della velocità. Questo viene fatto moltiplicando a sinistra la matrice del sistema preconditionato per \mathbf{M}^{-1} :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \mathbf{M}_m^{-1} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) + \mathbf{M}_m^{-1} \cdot (\text{viscous fluxes}) = 0 \quad (\text{Eq. 3.12})$$

3.2.4. Equazione di stato arbitraria

Nel modello matematico descritto in precedenza, la scelta del fluido è totalmente arbitraria. Una termodinamica qualsiasi può infatti essere applicata attraverso la matrice \mathbf{M} . Più precisamente, devono essere fornite le derivate della densità ρ e dell’entalpia h , rispetto alla pressione p e alla temperatura T . Avendo definito:

- il coefficiente di compressibilità a temperatura costante χ :

$$\chi = \frac{\rho_p}{\rho} \equiv \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad (\text{Eq. 3.13})$$

- il coefficiente di compressibilità a pressione costante β :

$$\beta = -\frac{\rho_T}{\rho} \equiv -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{Eq. 3.14})$$

– e il calore specifico a pressione costante c_p :

$$c_p = h_T \equiv \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (\text{Eq. 3.15})$$

allora per ogni sostanza pura, le derivate richieste sono date da:

- $\rho_p = \rho\chi$
- $\rho_T = -\rho\beta$
- $h_T = c_p$
- $h_p = \frac{1 - \beta T}{\rho}$

Nel codice sono implementate le opzioni seguenti:

gas ideale

le derivate sono definite in termini della costante dei gas R e del calore specifico a pressione costante:

$$\rho = \rho(p, T) = \frac{P}{RT}$$

$$\beta = \frac{1}{T}$$

$$\chi = \frac{1}{\rho} \equiv \frac{1}{\rho RT}$$

$$h_p = 0 \quad \Rightarrow \quad h = h(T) = c_p(T) \cdot T$$

liquidi (o fluidi incompressibili)

le derivate sono definite in termini di uno stato di riferimento (h_0 , T_0 e p_0 e di proprietà del fluido costanti:

$$d\rho = \rho_p dp + \rho_T dT \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho(p, T) = \rho_0 \exp[-\beta(T - T_0) + \chi(p - p_0)]$$

$$dh = h_p dp + h_T dT \quad \Rightarrow \quad h = h(p, T) = h_0 + c_p(T - T_0) + \frac{1 - \beta T}{\rho} (\rho - \rho_0)$$

dove β e χ possono assumere qualsiasi valore, incluso lo zero. Se $\beta = \chi = 0$, allora la densità è strettamente costante e $c_p = c_v \equiv c$, dove $c_v = c_p - R$ rappresenta il calore specifico a volume costante.

equazione di stato in forma gabbellare

in questo caso il codice può leggere un file di ingresso con i valori di densità ed entalpia e le loro derivate rispetto a p e a T , tabulati per un intervallo arbitrario di valori di pressione e di temperatura. Un'interpolazione di tipo bilineare è quindi utilizzata per estrarre dalla tabella i valori delle variabili di interesse per valori di p e T comunque variabili nell'intervallo scelto. Questa opzione è molto utile, per esempio, quando si vogliono trattare casi di fluidi reattivi in equilibrio termochimica, per i quali equazioni di stato in forma tabellare possono essere ottenute da tipici codici di equilibrio chimico.

3.3. Il modello numerico

3.3.1. Struttura dell'algoritmo

La figura seguente fornisce una schematica rappresentazione della struttura del codice:

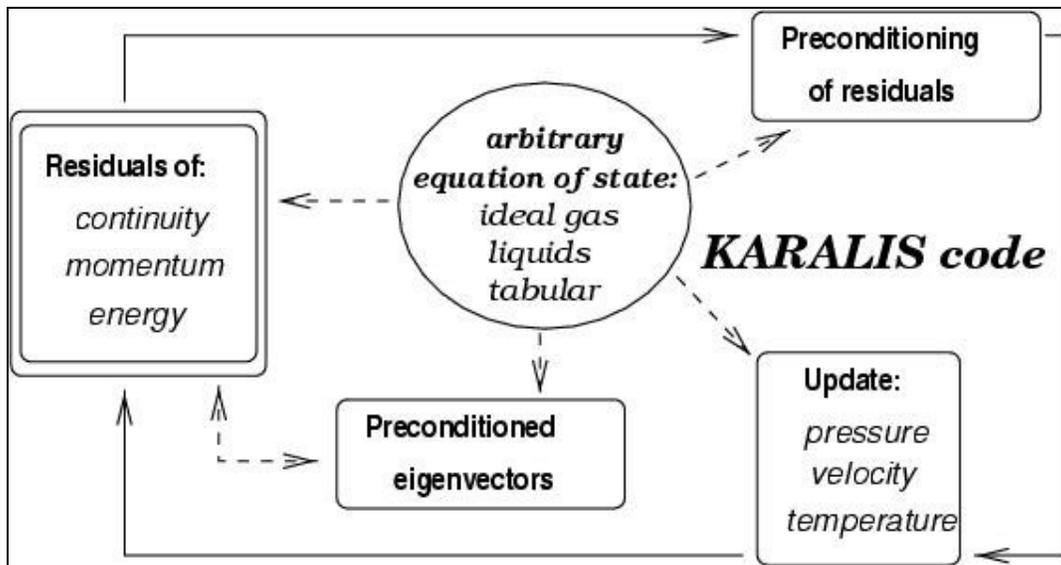


Figura 10: la struttura dell'algoritmo numerico implementato nel codice di calcolo

In un modello matematico ai volumi finiti completamente esplicito, la soluzione è data ad ogni ciclo (iterazione) da:

$$\Delta Q_v = \frac{\Delta t}{\Omega} \mathbf{M}_m^{-1} (\mathbf{RES}_{inv}^m + \mathbf{RES}_{vis}) \quad (\text{Eq. 3.16})$$

dove Ω rappresenta il volume della cella. L'algoritmo si compone dei quattro passi seguenti:

- calcolo dei residui conservativi delle equazioni di continuità, quantità di moto e di energia;

i residui viscosi non cambiano;

i residui non viscosi vengono modificati nel caso sia utilizzato uno schema TVD;

- preconditionamento di tutti i residui;
- aggiornamento delle variabili in termini di p , \vec{V} e T ;
- a ogni passo è fornita la corretta ed arbitraria termodinamica.

3.3.2. Metodi numerici

Il codice fa utilizzo di un algoritmo multi-grid con ciclo di tipo a V, accoppiato con un metodo di avanzamento nel tempo Runge-Kutta a 5 stadi, per convergere alla soluzione stazionaria. Questa formulazione è quella tipica per i flussi dell'aerodinamica e mostra un'eccellente efficienza anche per i flussi incompressibili, allorchè associata all'uso del preconditionatore di Merkle. I flussi convettivi possono essere calcolati sia attraverso l'uso di schemi TVD (anche chiamati schemi a matrice dissipativa), o attraverso tipici schemi a dissipazione scalare, come ad esempio lo schema quick [28], [29], [30]. I primi sono basati sulla decomposizione delle equazioni di Eulero in onde (decomposizione nelle variabili caratteristiche), cosicchè l'informazione possa essere trasportata nella giusta direzione in associazione con la relativa onda, in dipendenza del segno della corrispondente velocità dell'onda. Questo presuppone una decomposizione in autovettori della matrice di Eulero (ora in forma preconditionata), fatta alle interfacce delle celle, identificate tramite i coseni direttori n_x , n_y ed n_z :

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{P}\mathbf{D} \equiv \mathbf{P}(\mathbf{A}n_x + \mathbf{B}n_y + \mathbf{C}n_z) \quad (\text{Eq. 3.17})$$

dove:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial Q} \right) \quad \mathbf{B} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial Q} \right) \quad \mathbf{C} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial Q} \right) \quad (\text{Eq. 3.18})$$

cosicchè la valutazione numerica del vettore flusso \vec{F} :

$$F \equiv \vec{F} \cdot \vec{n} = F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z$$

è data da:

$$F_{i+1/2}^* = \frac{F_i + F_{i+1}}{2} - \frac{1}{2} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{R}_p \lfloor \mathbf{\Lambda}_p \rfloor \mathbf{L}_p (Q_{i+1} - Q_i) \quad (\text{Eq. 3.19})$$

dove \mathbf{R}_p ed \mathbf{L}_p rappresentano le matrici degli autovettori di destra e di sinistra di \mathbf{D}_p , e $\mathbf{\Lambda}_p$ rappresenta la matrice diagonale, i cui elementi sono gli autovalori di \mathbf{D}_p . Tutte le matrici

contengono la termodinamica arbitraria attraverso la matrice di preconditionamento \mathbf{P} . Ancora una volta, se $\mathbf{M}_m = \mathbf{M}$, allora $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ ed il sistema recupera la sua forma non preconditionata.

3.4. Modelli di turbolenza

Per poter tenere nel conto la natura turbolenta del flusso dell'aria intorno alle vele, è necessario ricorrere alla modellazione fisica. In un flusso turbolento di un fluido, all'energia cinetica mediamente posseduta dalle particelle di fluido nel loro moto globale lungo le linee di corrente, si deve sommare l'energia cinetica (turbolenta) determinata dalle fluttuazioni di velocità delle particelle stesse rispetto al suo valore medio. Per l'energia cinetica turbolenta è possibile scrivere un'equazione "esatta". Sfortunatamente, alcuni dei termini che compaiono nell'equazione dell'energia cinetica turbolenta sono di difficile trattazione e richiedono l'utilizzo di una qualche forma di modellazione fisica. Questo può essere fatto sia introducendo nell'equazione dell'energia cinetica turbolenta una qualche altra incognita ausiliaria (che richiede quindi l'uso di un'ulteriore equazione aggiuntiva), sia sostituendo l'equazione dell'energia cinetica turbolenta con un'altra equazione per una opportuna quantità fisica in grado di descrivere l'effetto della turbolenza. In ambito RANS tutti i modelli di turbolenza forniscono direttamente o indirettamente un termine di viscosità aggiuntivo (viscosità turbolenta) che va ad aggiungersi alla viscosità laminare (caratteristica propria del particolare fluido utilizzato) nelle equazioni di Navier-Stokes.

Per il presente studio si è scelto di fare uso di due diversi modelli fisici per la turbolenza. Il primo modello risolve due equazioni aggiuntive per l'energia cinetica turbolenta, κ , e per il suo tasso di distruzione, ε . Il loro legame funzionale con la viscosità turbolenta può essere scritto come:

$\nu_t = C_\mu \frac{\kappa^2}{\varepsilon}$. Tale modello è universalmente noto in letteratura come modello κ - ε , ed è

universalmente usato nei codici di calcolo. Il secondo modello fisico prevede invece la risoluzione di una sola equazione in una variabile, $\tilde{\nu}_t$, detta viscosità turbolenta modificata, che è proporzionale alla viscosità turbolenta ν_t . Tale modello, noto come modello di Spalart e Allmaras [31], grazie alle sue doti di accuratezza ed economicità computazionale, si sta rivelando una valida alternativa alla classe dei modelli a più equazioni, come il già citato κ - ε . I paragrafi seguenti contengono una breve descrizione dei due modelli di turbolenza sin qui citati. Per un ulteriore approfondimento si rimanda alla referenze di letteratura.

3.4.1. Il modello di Spalart e Allmaras

3.4.1.1. Introduzione

Nel corso degli ultimi anni il modello di Spalart e Allmaras ha acquistato una sempre maggiore popolarità nella comunità della CFD. Il modello, infatti, offre diversi vantaggi, sia rispetto ai modelli algebrici, sia a quelli a due equazioni. In primo luogo il modello è “locale”, e quindi ben si adatta tanto ai solutori Navier-Stokes strutturati tanto a quelli non strutturati. In secondo luogo è di facile uso e implementazione, e richiede condizioni al contorno banali e che non presentano problemi di instabilità numerica, che sono invece tipici della classe dei modelli a due equazione, specialmente nelle formulazioni proprie per i bassi numeri di Reynolds. Il modello risolve un’equazione per la viscosità turbolenta modificata, $\tilde{\nu}_t$, ed è in realtà costituito da tre sottomodelli annidati: quello per flusso non confinato (free shear flow), quello per il flusso nella zona prossima alla parete solida, ma ancora caratterizzato da un alto valore del numero di Reynolds (la regione logaritmica del profilo universale di velocità), e infine, quello per la zona vicina alla parete a basso numero di Reynolds, che consente l’integrazione dell’equazione fino al sottostrato limite laminare. A seconda di quanto fitta sia la griglia computazionale in prossimità delle pareti solide, uno o più dei sottomodelli cessa di fatto di dare contributo, e il modello fornisce il corretto valore della viscosità turbolenta per tutti i possibili valori della distanza a-dimensionale y^+ .

3.4.1.2. Formulazione del modello

Come detto, il modello di Spalart e Allmaras risolve un’equazione per la viscosità turbolenta modificata, $\tilde{\nu}_t$. Tale equazione, nella formulazione originaria del modello, può essere scritta come:

$$\frac{D\tilde{\nu}_t}{Dt} = c_{b1}S\tilde{\nu}_t + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left((v + \tilde{\nu}_t) \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_k} \right] - c_{w1} f_w \left[\frac{\tilde{\nu}_t}{d} \right]^2 \quad (\text{Eq. 3.20})$$

I tre termini al secondo membro dell’equazione ne rappresentano rispettivamente, il termine sorgente, il termine di diffusione e quello di distruzione. Si può inoltre notare la presenza nel termine di distruzione, di un termine in forma non conservativa. Per un’implementazione del modello in un codice ai volumi finiti, è più conveniente riscrivere l’equazione in modo diverso. Moltiplicando tutto per ρ e dopo qualche passaggio, si ottiene:

$$\frac{\partial \rho \tilde{\nu}_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho \tilde{\nu}_t u_j}{\partial x_j} = c_{b1} S \rho \tilde{\nu}_t - c_{w1} \rho f_w \left[\frac{\tilde{\nu}_t}{d} \right]^2 + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \tilde{\nu}_t \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \right) + \quad (\text{Eq. 3.21})$$

$$+ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \tilde{v}_t}{\partial x_j} \right) - \frac{c_{b2}}{\sigma} \rho \tilde{v}_t \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \tilde{v}_t}{\partial x_j} \right)$$

Il valore della viscosità turbolenta è quindi calcolato come: $\nu_t = f_{v1} \tilde{\nu}_t$, dove la funzione f_{v1} è definita come: $f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}$, con: $\chi = ky^+$. La figura () mostra l'andamento di f_{v1} in funzione di y^+ . La forma di f_{v1} è tale che per alti valori di y^+ ($y^+ > 60$), f_{v1} vale circa 1, determinando così l'eguaglianza: $\nu_t = \tilde{\nu}_t$. Per piccoli valori di y^+ , la forma di f_{v1} è invece tale da fornire alla viscosità turbolenta ν_t valori sempre corretti all'approssimarsi alle pareti solide. Sulle pareti solide, in corrispondenza delle quali si ha $y^+ = 0$, risulta verificata la condizione fisica per la viscosità turbolenta: $\nu_t = 0$.

Gli altri termini che compaiono nell'equazione del modello hanno espressione:

$$S \equiv S + \frac{\tilde{\nu}_t}{k^2 d^2} f_{v2} \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad c_{w1} = \frac{c_{b1}}{k^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}$$

$$f_w = g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{1/6} \quad g \equiv r + c_{w2} (r^6 - r) \quad r \equiv \frac{\tilde{\nu}_t}{Sk^2 d^2}$$

i valori delle costanti del modello sono:

$$\sigma = 2/3 \quad c_{b1} = 0.1355 \quad c_{b2} = 0.622 \quad c_{v1} = 7.1 \quad k = 0.41$$

Inoltre, per grandi valori di r , la funzione f_w tende ad assumere un valore costante.

3.4.2. Il modello κ - ϵ

3.4.2.1. Introduzione

Il modello κ - ϵ standard viene per la prima volta pubblicato in letteratura nel 1974, ad opera di Launder e Spalding [38]. Si tratta dunque di un modello che risale quasi agli albori della CFD, ma che ancora oggi è forse il più diffuso ed utilizzato. Il modello ha origine da un tentativo di integrazione diretta dell'equazione per l'energia cinetica turbolenta. Tale equazione ha un'importanza particolare, in quanto è alla base non solo del modello κ - ϵ , ma di tutta la famiglia dei modelli a due equazioni. Per questo motivo, vale la pena dedicarle qualche commento. Già nel 1972, e sotto l'ipotesi di flusso incomprimibile, Tennekes e Lumley [39] riuscirono a scrivere un'equazione tanto per l'energia cinetica del flusso medio, K , sia per l'energia cinetica turbolenta, κ . Ricordando che

gli apici si riferiscono a grandezze fluttuanti e le barre a medie temporali, le equazioni per K e per κ si possono scrivere rispettivamente come:

$$\frac{\partial \rho K}{\partial t} + \frac{\partial \rho K u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\rho u_j + 2\mu u_j e_{ij} - \rho u_j \overline{u_i u_j} \right) - 2\mu e_{ij} \cdot e_{ij} + \rho \overline{u_i u_j} \cdot e_{ij} \quad (\text{Eq. 3.22})$$

$$\frac{\partial \rho \kappa}{\partial t} + \frac{\partial \rho \kappa u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\rho \overline{u_j} + 2\mu \overline{u_j e_{ij}} - \rho \frac{1}{2} \overline{u_i \cdot u_i u_j} \right) - 2\mu \overline{e_{ij} \cdot e_{ij}} - \rho \overline{u_i u_j} \cdot e_{ij} \quad (\text{Eq. 3.23})$$

Le due equazioni hanno forma del tutto simile e in esse compaiono sette differenti quantità, ciascuna delle quali ha un diverso significato fisico. Se con Q si indica di volta in volta tanto l'energia cinetica del flusso medio quanto l'energia cinetica turbolenta, il significato fisico dei termini che compaiono nelle equazioni precedenti è il seguente:

Variazione di Q nel tempo (I)	+ Trasporto di Q per convezione (II)	=	Trasporto di Q ad opera della pressione (III)	+ Trasporto di Q ad opera degli sforzi viscosi (IV)	+ Trasporto di Q ad opera degli sforzi di Reynolds (V)
			- Tasso di distruzione di Q (VI)	+ Produzione di Q (VII)	

L'esame dei singoli termini che compaiono nelle due equazioni, permette di fare qualche interessante osservazione. In particolare, il termine (VII) a secondo membro, ha stesso modulo, ma segno opposto nelle due equazioni per K e per κ . Nel caso generale di un getto non confinato, descrivibile con un modello bidimensionale o a simmetria assiale, si trova che l'unico termine significativo degli sforzi di Reynolds, $-\rho \overline{u_i v_i}$, è una quantità positiva allorchè il principale termine

del tensore delle deformazioni, $\frac{\partial u}{\partial y}$, è positivo. Ne risulta che il termine (VII) è una sorgente per

l'energia cinetica turbolenta, e un pozzo per l'energia cinetica del flusso medio. Si è così ritrovato in forma matematica il concetto di trasformazione dell' energia cinetica media del flusso medio, in energia cinetica turbolenta.

Il termine di dissipazione viscosa (VI) nell'equazione per κ , è invece sempre definito negativo, in quanto è:

$$-2\mu \overline{e_{ij} \cdot e_{ij}} = -2\mu \left(\overline{e_{xx}^2} + \overline{e_{yy}^2} + \overline{e_{zz}^2} + \overline{e_{xy}^2} + \overline{e_{xz}^2} + \overline{e_{yz}^2} \right) \quad (\text{Eq. 3.24})$$

La somma in parentesi è fatta tra tutte quantità definite positive, e quindi il termine (VI) non può che essere negativo. Tale termine risulta quindi sempre essere un pozzo per l'equazione di κ .

Dividendo il termine (VI) per la densità ρ , si ottiene il tasso di dissipazione di κ per unità di massa, solitamente indicato con ε .

$$\varepsilon = -2\nu \overline{\varepsilon'_{ij} \cdot \varepsilon'_{ij}} \quad (\text{Eq. 3.25})$$

Esso rappresenta una misura di quanta energia cinetica turbolenta sia dissipata dal lavoro fatto dai vortici più piccoli per vincere gli sforzi viscosi. È in definitiva il concetto della cascata dell'energia: l'energia cinetica K del flusso medio è convertita in energia cinetica turbolenta a scale via via più piccole, fino alla sua dissipazione ad opera degli sforzi viscosi.

Bradshaw nel 1981 riuscì a scrivere un'equazione per ε , che però si rivelò di difficile utilizzo pratico perchè conteneva molte incognite e termini di difficile, o impossibile, misurazione sperimentale. Nel 1974 Launder e Spalding proposero il modello κ - ε standard, la cui descrizione sarà oggetto del prossimo paragrafo.

3.4.2.2. *Formulazione del modello*

Il modello utilizza le grandezze κ ed ε precedentemente introdotte, per definire due scale caratteristiche della turbolenza di grande scala: una scala di velocità, ξ , definita tramite l'energia cinetica turbolenta come:

$$\xi = \kappa^{1/2} \quad (\text{Eq. 3.26})$$

ed una scala di lunghezza, ℓ , caratteristica della turbolenza di grande scala, definita come:

$$\ell = \frac{\kappa^{3/2}}{\varepsilon} \quad (\text{Eq. 3.27})$$

Nel paragrafo precedente si è detto come ε rappresenti in realtà la velocità alla quale l'energia cinetica turbolenta viene dissipata alle piccole scale ad opera dei vortici più piccoli. Sembra perciò esserci una contraddizione nell'utilizzare ε per la definizione della scala caratteristica di lunghezza,

ℓ , propria della turbolenza di grande scala. Questa apparente contraddizione è in realtà superata sotto l'ipotesi di alti numeri di Reynolds. Per Reynolds elevato si trova sperimentalmente che il tasso al quale l'energia cinetica del flusso medio è trasferita a vortici di scala sempre più piccola, è esattamente uguale alla velocità alla quale l'energia cinetica turbolenta delle scale più piccole viene dissipata dagli sforzi viscosi. L'ipotesi di alto numero di Reynolds fornisce dunque una validità teorica al modello, ma ne costituisce anche un limite. Fortunatamente, la maggior parte delle applicazioni di interesse ingegneristico sono interessate da flussi di fluidi ad alto numero di Reynolds, e tale limitazione teorica non costituisce un problema. Negli ultimi anni comunque, in letteratura sono stati presentate varie versioni del modello, opportunamente modificate per funzionare anche ai bassi regimi di Reynolds.

Tramite le due scale caratteristiche ξ ed ℓ , è possibile introdurre una viscosità turbolenta, definita come:

$$\mu_t = C_\mu \rho \xi \ell = C_\mu \rho \frac{\kappa^2}{\varepsilon} \quad (\text{Eq. 3.28})$$

Le due equazioni di trasporto per κ ed ε , sono quindi scritte come:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \kappa}{\partial t} + \frac{\partial \rho \kappa u_j}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right) + 2\mu_t e_{ij} e_{ij} - \rho \varepsilon \\ \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varepsilon u_j}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\kappa} 2\mu_t e_{ij} e_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{\kappa} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 3.29})$$

Il cui significato fisico è il seguente:

Variazione di κ od ε nel tempo	+ Trasporto di κ od ε per convezione	=	Trasporto di κ od ε per diffusione	+ Velocità di produzione di κ od ε	- Velocità di distruzione di κ od ε
---	---	---	---	---	--

Le costanti che compaiono nel modello valgono:

$$C_\mu = 0.09; \sigma_\kappa = 1.00; \sigma_\varepsilon = 1.30; C_{1\varepsilon} = 1.44; C_{2\varepsilon} = 1.92$$

3.5. La struttura del codice

3.5.1. Struttura dati

Il codice fa uso di un vettore mono-dimensionale per memorizzare in maniera dinamica tutti i dati reali: la prima parte del vettore è riservata per i dati che necessitano di essere memorizzati permanentemente; lo spazio rimanente in fondo alla lista è invece utilizzato in modo dinamico per memorizzare dati di natura temporanea.

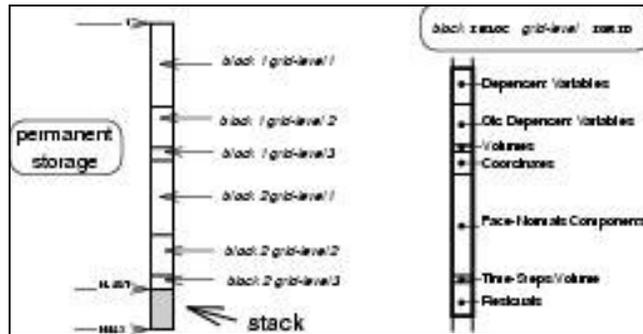


Figura 11: la struttura della lista dati

Come è evidenziato nella Figura 11, ad ogni blocco o livello di griglia è assegnata una porzione dell'area di memorizzazione all'interno della lista, che è organizzata in modo tale da memorizzare solo i dati che necessitano di memorizzazione permanente (come mostrato nella parte sinistra della figura). L'accesso a tutti i dati è consentito mediante una lista di puntatori, che è memorizzata in un blocco COMMON.

Due striscie aggiuntive di celle fantasma sono utilizzate per memorizzare le informazioni del campo tra blocchi adiacenti. Anche le dimensioni del blocco o livello di griglia ($NI \times NJ \times NK$) sono memorizzate in un blocco COMMON sotto forma di liste blocco o livello di griglia.

La parte libera della lista è utilizzata dinamicamente per liste temporanee di variabili di campo. L'accesso temporaneo a questa parte di memoria è consentito per mezzo di puntatori temporanei, essi pure memorizzati nel blocco COMMON. Questa area è chiamata con il nome di "stack" in quanto l'allocazione di memoria può essere allocata e rilasciata, occupando e liberando lo spazio di memoria. Questo sistema di gestione dinamica dello stack è usato di volta in volta per ogni singolo blocco o livello di griglia. Accoppiato con l'ambiente multi blocco, questo approccio permette di minimizzare il requisito di memoria totale necessario per una data simulazione numerica; l'ulteriore suddivisione del dominio computazionale in un numero maggiore di blocchi, risulta infatti in una minor richiesta di spazio di memorizzazione temporaneo.

3.5.2. Struttura del solutore

La struttura ad albero del codice è schematicamente mostrata in Figura 12. La parte superiore dell'albero controlla le tre sezioni principali di inizializzazione, cuore del solutore e di output. Le tre sezioni sono costituite dalle cosiddette routine di alto livello. Le routine di alto livello sono caratterizzate dal fatto che esse hanno accesso diretto a tutti i dati contenuti nella lista work per mezzo delle liste di puntatori memorizzate nel blocco di COMMON.

All'interno delle routine di alto livello è consentita la libertà totale all'utente di eseguire cicli sui livelli di griglia e/o sui blocchi. L'idea dietro questa struttura è di costruire il codice con il massimo grado di modularità e di flessibilità. Nel caso, infatti, sia necessario introdurre nuovi moduli contenenti nuove funzionalità, è possibile farlo nella parte superiore della struttura senza modificare altri moduli già esistenti.

Le routine di basso livello rappresentano i blocchi costruttivi elementari del codice: esse svolgono compiti molto specifici in un dato blocco o livello di griglia nel modo tridimensionale (ad esempio tutti i vettori sono visti come vettori tridimensionali con gli usuali cicli annidati sui 3 indici i, j e k), in contrasto con il mondo monodimensionale delle routine di alto livello dove la sola lista 1D work è visibile.

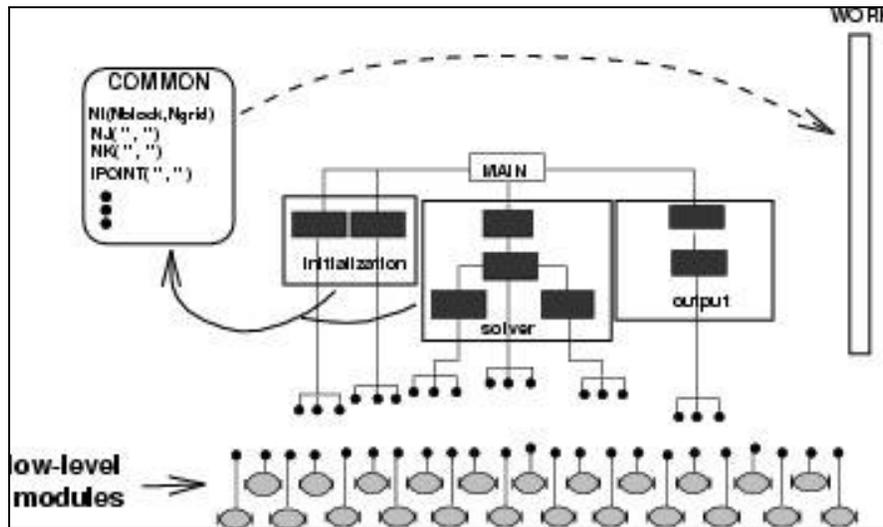


Figura 12: la struttura ad albero del codice

3.5.3. Parallelizzazione del codice

Il codice permette di trattare la più generale struttura multi-blocco, con ogni blocco avente un'orientazione degli indici (i, j, k) indipendente e dove ogni faccia può essere costituita da più segmenti. Le condizioni di connettività tra blocchi sono permesse tra ogni coppia di segmenti di faccia, indipendentemente dalla loro rispettiva orientazione. Nel disegno di un codice multi-blocco

da utilizzarsi su macchine a memoria distribuita, cura particolare deve essere posta nello stabilire il dove e il come le comunicazioni inter-blocco debbano avvenire. Gli aspetti di parallelizzazione sono infatti connessi con il tipo di decomposizione del dominio che deve essere utilizzato, e con le condizioni di dipendenza dei dati tra sub-domini differenti.

Il primo aspetto del problema è risolto assegnando ciascun blocco (o gruppo di blocchi) a un differente processore. Per quanto riguarda il secondo aspetto del problema, occorre ricordare che esistono tre tipi differenti di dipendenza tra dati: la dipendenza **esplicita** (le informazioni dal blocco B al passo temporale precedente sono necessarie al blocco A e viceversa, sulle interfacce tra i blocchi, si veda la Figura 13). Queste rappresentano la grande maggioranza delle condizioni di dipendenza in un codice esplicito, e sono trattate mediante l'utilizzo delle due strisce di celle fantasma. Condizioni di dipendenza **implicita** si realizzano per esempio all'interno degli algoritmi impliciti di rilassamento che sono utilizzati nel lato di redistribuzione del multi-grid. Infine, le dipendenze **globali** sono richieste per la determinazione delle condizioni di convergenza della soluzione, o, come nel caso di calcolo accurato nel tempo, in cui il passo temporale deve essere uniforme in tutti i vari sotto domini.

Lo scambio delle condizioni di dipendenza esplicite tra i vari blocchi è molto localizzato e viene fatto all'inizio di ogni stadio di Runge-Kutta. L'idea è quella di consentire a tutti i blocchi di accedere a tutte le informazioni necessarie prima di iniziare la fase di valutazione del flusso numerico.

Lo scambio di dati avviene in due fasi, che sono schematicamente illustrati nella figura 21, per una configurazione a due blocchi che coinvolge una sola condizione di connessione tra un'intera faccia del blocco 1 ed un segmento di faccia del blocco 2. Durante la prima fase le locazioni di memoria corrispondenti alle due strisce di celle fantasma vengono riempite con i corrispondenti valori interni delle variabili di campo dipendenti. Questi rappresentano tutte le informazioni necessarie per il calcolo dei flussi non viscosi attraverso i confini connessi.

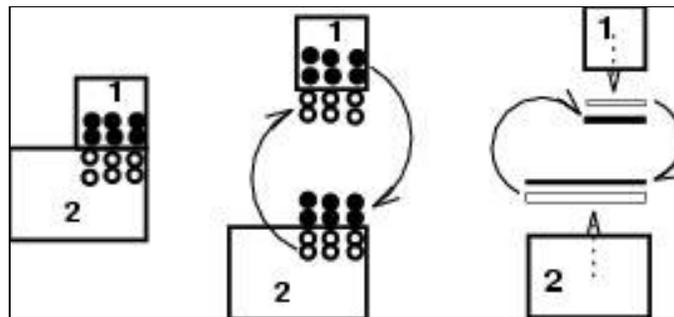


Figura 13: scambio di dati: variabili dipendenti e gradienti di boundary

La seconda fase, necessaria solo nel caso di calcolo viscoso, riguarda il calcolo dei gradienti della variabili dipendenti, che sono valutati per mezzo dell'integrazione di Gauss su un volume di controllo centrato al centro delle interfacce tra celle. Ciò che succede al confine tra blocchi è che solo metà del volume di controllo è disponibile, in quanto la seconda metà mancante fa parte del blocco adiacente. A questo scopo, si fa utilizzo nel codice di 6 liste permanenti di boundary (PBA), uno per ogni faccia del blocco, all'interno della lista work. Il mezzo contributo ai gradienti di boundary è calcolato e memorizzato in 6 liste temporanee di boundary (TBA). Il procedimento è ripetuto per tutte le facce e per tutti i blocchi. Le informazioni di sopra sono quindi trasferite dal TBA al corrispondente segmento della faccia connessa del PBA, e la memoria occupata dalle 6 liste TBA può quindi essere liberata. Finalmente, durante il calcolo dei flussi viscosi, la parte mancante al contributo dei gradienti di boundary può essere trovata nella lista PBA ed aggiunta. Le frecce solide mostrate nella Figura 13 rappresentano i processi di comunicazione. Si noti come, usando il metodo descritto, non vi è necessità di utilizzare alcuna informazione geometrica riguardante le celle fantasma. Questo permette di evitare tutti i problemi connessi con la costruzione dei volumi e delle normali per le celle fantasma, problemi che sorgono specialmente quando è usata una segmentazione delle facce.

3.5.4. Filosofia di programmazione

Sebbene il codice sia stato scritto in Fortran-77, la sua filosofia di programmazione è pienamente orientata agli oggetti, con intenso utilizzo di allocazione dinamica e puntatori.

L'oggetto principale è rappresentato dal dominio, o semplicemente, dal blocco volume finito, indipendentemente da quale livello di griglia esso si riferisca. Tutti i livelli di griglia utilizzati nella struttura multi-grid, condividono infatti lo stesso rango gerarchico. Ogni dominio possiede i suoi propri dati (attraverso i puntatori) e le sue proprie funzioni (rappresentate dalle routine di basso livello, descritte in precedenza). Ai dati appropriati viene fornito accesso con l'utilizzo dei puntatori memorizzati nel blocco COMMON.

La porzione di alto livello del codice può essere vista come una raccolta di classi derivate che mette in opera gli algoritmi scelti, quali per esempio l'avanzamento temporale di Runge-Kutta o l'aggiunta di equazioni aggiuntive per la modellazione della turbolenza. Tutti i puntatori e di conseguenza tutti i dati sono sempre disponibili a questo livello.

La facile implementazione di nuove caratteristiche, funzionalità, come pure di nuove equazioni di trasporto, ha dimostrato nel corso degli anni, proprietà di facilità di manutenzione e di facilità di apprendimento della sua struttura, che costituiscono elementi chiave della programmazione orientata ad oggetti.